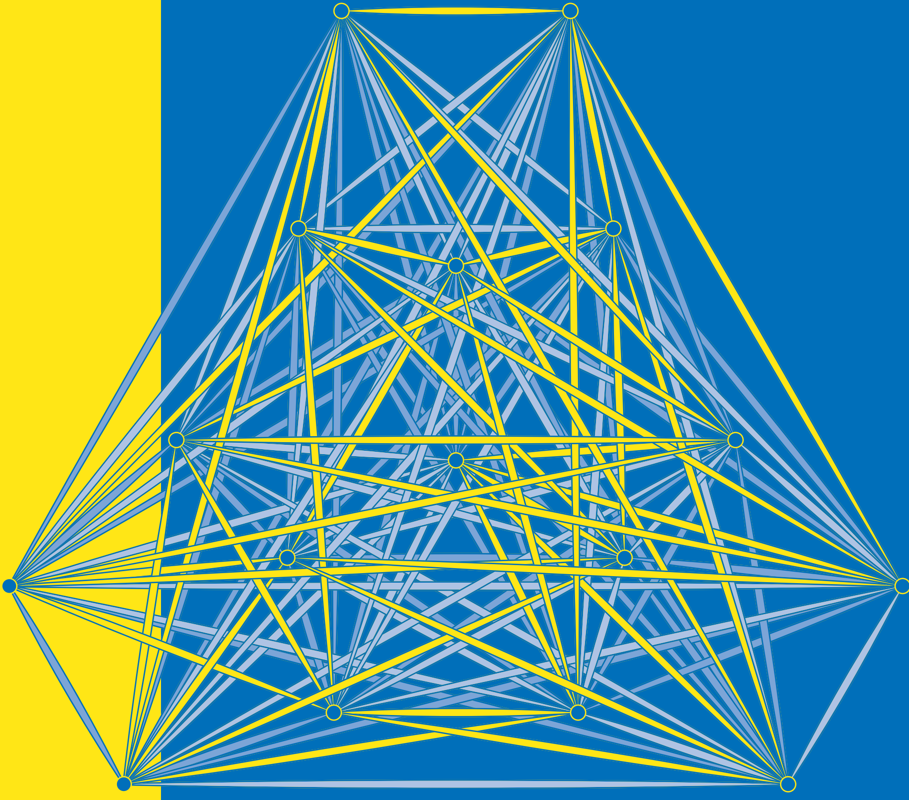
А. М. Райгородский

ЛИНЕЙНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД В КОМБИНАТОРИКЕ



А. М. Райгородский

Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

Издание второе, дополненное

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 519.1
ББК 22.15
Р18

Райгородский А. М.
Линейно-алгебраический метод в комбинаторике
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2015
144 с.
ISBN 978-5-4439-2489-2

Современная комбинаторика — это весьма многогранная и активно развивающаяся область математики. В XX веке был разработан ряд мощных методов, позволяющих решать многие трудные задачи комбинаторики. Среди этих методов особое место занимает линейно-алгебраический метод. С его помощью удалось добиться прорыва в таких классических проблемах, как, например, проблема Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. В книге излагаются основы метода и описываются наиболее яркие примеры его применения. Для понимания материала достаточно знания элементарных понятий линейной алгебры и математического анализа. Книга будет полезна студентам и аспирантам, интересующимся комбинаторным анализом, а также специалистам в области дискретной математики.

Подготовлено на основе книги:
Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2015. — 2-е изд., доп. — 144 с. — ISBN 978-5-4439-0275-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2489-2

Оглавление

1 Введение

Комбинаторика — один из наиболее увлекательных, многогранных и нетривиальных разделов современной математики. Имея множество приложений, она развивается настолько бурно, что даже простая попытка перечислить ее основные направления, по-видимому, обречена на провал. Десятки специализированных журналов ежемесячно публикуют сотни новых статей, каждый год выходят в свет монографии и учебники, и уследить за всем этим колоссальным потоком информации весьма нелегко. Вряд ли найдется человек, имеющий право заявить, что знает все последние достижения в комбинаторике.

В то же время многие из тех, кто не совсем хорошо ориентируется в области «дискретных» (т. е. в сущности комбинаторных) задач, полагают, что комбинаторика, так сказать, «не вполне научна». Считается, что если формулировки задач доступны школьнику, а объекты, с которыми приходится иметь дело, не требуют знания того, что такое интеграл Лебега или когомология, то и развивать соответствующую теорию незачем. При этом бытует мнение, что задачи в комбинаторике разрозненны и для их решения не существует единых содержательных подходов. Правда, иной раз вспоминают о методе производящих функций, который активно используется при перечислении различных объектов, — но и только. Такой взгляд, с одной стороны, способствует чрезмерной мифологизации комбинаторики — дескать, только гениям под силу решать «штучные» задачи-головоломки, — а с другой стороны, он ведет к возникновению пренебрежительного отношения к комбинаторным проблемам, которые якобы «олимпиадны» и в контекст «серьезных» исследований включены быть не могут. Действительно, постановка многих комбинаторных вопросов носит весьма олимпиадный характер, и известного рода изобретательность (если не изощренность) очень важна для успешной работы с ними.

И тем не менее, методология этой работы отнюдь не исчерпывается одним лишь методом производящих функций. В XX веке — веке наиболее активного развития комбинаторики и внедрения ее идей во всевозможные области знания (компьютерные технологии, биоинженерия и пр.) — был построен мощный аппарат, позволяющий эффективно бороться с комбинаторными трудностями.

Одновременно с быстрым ростом числа направлений и специальных проблем комбинаторики шло становление целых «наук в науке», группировавшихся вокруг общих методов, приводивших, в частности, к решению классических дискретных задач. Среди таких методов и вероятностный метод в комбинаторике, который сам заслуживает долгого и тщательного обсуждения, и *линейно-алгебраический* метод, вынесенный в название этой книги.

Казалось бы, какая может быть связь между комбинаторикой и весьма геометричной линейной алгеброй? Однако связь есть, и она удивительно глубока и красива. Мысль о том, что линейно-алгебраические факты можно увязать с фактами дискретной математики, как раз «олимпиадна». Нужно было обладать большим остроумием, чтобы породить ее. Некоторые наиболее яркие результаты, полученные с помощью линейно-алгебраического метода, кажутся на первый взгляд и вовсе невероятными.

Знаменитый венгерский математик Поль Эрдёш, благодаря которому современная комбинаторика в значительной степени выглядит такой, какой мы ее знаем, заявлял даже, что подобные результаты хранятся в некоей особой божественной Книге. Эрдёш, разумеется, шутил, но результаты эти настолько изящны, что «Книгу» (или часть ее) издали в 1998 году (см. [35]), и она уже переведена на несколько различных языков, включая русский (см. [1]), а также выдержала четыре (!) издания (см. [36]). Впрочем, для нас главное — это наличие метода и тонких фактов, установленных за счет него.

В этой книге рассматривается несколько наиболее популярных и интересных задач комбинаторики, решаемых с помощью линейной алгебры. Среди решений рассмотрены и те, что удостоились упоминания в «Книге», и другие. Наша цель — через призму этих удивительных задач и решений увидеть суть общего метода, его многоплановость и перспективность. Мы должны понять, что комбинаторика — это в первую очередь красивая *наука* и что задачи ее можно и стоит решать. Например, посредством линейно-алгебраического метода.

Завершая введение, скажем несколько слов о структуре книги. В книге семь глав, каждая из которых посвящена какой-нибудь известной задаче комбинаторики, решаемой с помощью того или иного варианта линейно-алгебраического метода. Основные результаты формулируются в виде теорем; однако приводятся и менее значимые утверждения, называемые в тексте предложениями, а также доказывается ряд вспомогательных фактов (лемм).

Практически все теоремы в книге именные, и их авторство указано в заголовках теорем. Там же даются ссылки на оригинальные статьи, в которых содержатся доказательства (вне зависимости от того, приводится ли доказательство теоремы в книге). Есть и несколько безымянных теорем. Будучи глубокими, но не слишком трудными, они давно вошли в математический фольклор, и установить, кому они принадлежат, мы не можем. В конце каждой главы есть задачи. Иногда они сводятся к доказательству известного утверждения. В этом случае мы пишем в скобках имя его автора.

2 Задачи о пересечениях конечных множеств

2.1. Немного истории и формулировка теоремы Франкла—Уилсона

Ответ на следующий вопрос многие знают еще со школы — как раз из олимпиадной деятельности. Пусть $\mathcal{R}_n$ — некоторое конечное множество, состоящее из n различных элементов. Например, мы можем считать, что $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим в $\mathcal{R}_n$ произвольную совокупность трехэлементных подмножеств (сочетаний) $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$, обладающую таким свойством: $\left|M_i \cap M_j\right| \neq 1$ для любых несовпадающих индексов $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Здесь «модуль» множества — это его мощность, и, в частности, $|M_i| = 3$ для каждого $i \in \{1, \ldots, s\}$, в то время как $|\mathcal{M}| = s$ (совокупность — это ведь тоже множество, элементы которого суть M_i). Понятно, что заведомо $s \leqslant C_n^3$. Однако на элементы совокупности $\mathcal{M}$ (3-сочетания в $\mathcal{R}_n$) наложено дополнительное ограничение, состоящее в том, что никакие два из них не могут иметь в пересечении ровно один общий элемент. Разумеется, далеко не всякая совокупность $\mathcal{M}$ подчиняется указанному ограничению, и, стало быть, возникает обещанный вопрос: *а насколько большой может оказаться величина $s = |\mathcal{M}|$ в сделанных предположениях?* Вопрос этот совершенно типичен для так называемой *экстремальной комбинаторики* (ищутся экстремальные значения тех или иных комбинаторных характеристик), и в естественности его усомниться трудно. Впрочем, любые сомнения отпадут позже, когда мы не только изучим общую проблематику подобного рода, но и приведем красивые приложения соответствующих результатов в геометрии.

Итак, как мы уже говорили, ответ на поставленный вопрос многим известен. Те же, кто с ним еще не знаком, вполне способны обосновать его самостоятельно. Посему мы лишь приведем его формулировку, а доказательство оставим за читателем. Заметим только, что проще всего воспользоваться стандартным методом математической индукции. Кстати, именно так действовал венгерский математик Жигмунд Надь, который и был, по-видимому, автором следующего утверждения, полученного им в 60-е годы прошлого века.

Теорема 1 (Ж. Надь, [48]). *Если в совокупности $\mathcal{M}$, состоящей из трехэлементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, никакие два множества не пересекаются в точности по одному общему элементу, то $s = |\mathcal{M}| \leqslant n'$, где*

$$\begin{aligned} n' &= n && \text{при } n = 4k, \\ n' &= n-1 && \text{при } n = 4k+1, \\ n' &= n-2 && \text{при } n = 4k+2 \text{ и } n = 4k+3. \end{aligned}$$

Конечно, k принимает в теореме любые натуральные значения. Имеется в виду попросту, что остаток от деления числа n на 4 может оказаться нулем, единицей, двойкой или тройкой. В зависимости от этого остатка и находится величина оценки в теореме. В дальнейшем же мы будем использовать обозначения, принятые в теории чисел: $n \equiv i \pmod p$ (читается «n сравнимо с i по модулю p») означает, что $n - i$ делится на p или, в терминах теоремы 1, $n = pk + i$ (i — остаток от деления n на p).

С одной стороны, замечательно то, что теорема неулучшаема. Иными словами, для каждого n ничего не стоит построить совокупность $\mathcal{M}$, обладающую всеми нужными свойствами и, тем не менее, содержащую в аккурат n' элементов (проделайте это!). С другой стороны, разочаровывает то, что мы как бы сами себе противоречим: вроде бы, во введении мы заявляли, что комбинаторика не есть чисто олимпиадная дисциплина и что задачи в ней не решаются одними «изысканными», олимпиадными методами; однако налицо обратная ситуация, ведь мы сами признаем, что теорема 1 как раз относится к олимпиадной вотчине. Впрочем, довольно-таки очевиден тот факт, что постановка вопроса, исчерпывающий ответ на который мы только что привели, весьма специальна. Действительно, настоящая проблема, на которую лишь намекает теорема 1, куда как более общая, и сейчас мы к ней обратимся.

Опять-таки, пусть $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — это произвольная совокупность подмножеств (сочетаний) в $\mathcal{R}_n$. Однако теперь мы будем считать, что $|M_i| = k$, $i = 1, \ldots, s$, где k — некоторое наперед заданное число. Более того, мы предположим, что при каком-нибудь фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant k$, выполнено условие $\left|M_i \cap M_j\right| \neq t$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Обозначим через $m(n, k, t)$ величину $\max|\mathcal{M}|$, где максимум берется по всем совокупностям $\mathcal{M}$ с указанными ограничениями. Ясно, что $m(n, 3, 1)$ — это число, изученное в теореме 1 Ж. Надем, и что работать с $m(n, k, t)$ в общем случае намного увлекательнее и труднее.

По-видимому первым, кто стал активно исследовать $m(n, k, t)$, был Поль Эрдёш, которого мы упоминали во введении. Мы не станем вдаваться здесь в подробности «кустарного», так сказать, периода в истории проблемы отыскания величины $m(n, k, t)$ или хотя бы ее оценок. Заметим только, что проблема очень быстро сделалась крайне популярной. Ею занимались многие выдающиеся «дискретчики», но даже, скажем, при $k = 5$, $t = 2$ полного решения ее найти не удавалось. Что уж говорить о ситуациях, когда $k = k(n)$ и $t = t(n)$, например, $k = [n/2]$, $t = [n/4]$! И вот тут линейная алгебра пришла на помощь: в конце семидесятых — начале восьмидесятых годов XX века два великолепных «комбинатора» П. Франкл и Р. М. Уилсон разработали целый линейно-алгебраический метод, позволивший отыскать $m(n, k, t)$ при очень многих значениях параметров n, k, t.

Мы поступим следующим образом. Сперва сформулируем частный случай теоремы Франкла—Уилсона. Уже он будет исключительно нетривиален, и все изящество, всю глубину линейно-алгебраического подхода можно будет наблюдать в процессе его доказательства, которое мы проведем в п. 2.2. Затем в п. 2.3 мы еще раз убедимся в силе метода, установив, что результат, полученный с его помощью, неулучшаем. В то же время мы увидим там, насколько неожиданным и почти невероятным является этот результат. Далее, в п. 2.4 мы дадим общую формулировку теоремы Франкла—Уилсона и постараемся развернуть панораму многочисленных результатов, которые возникли в связи с ней и около нее — в том числе (и в первую очередь) за счет линейно-алгебраического метода. Наконец, в п. 2.5 мы обсудим вопрос о точности общей теоремы Франкла—Уилсона из п. 2.4.

Итак, имеет место

Теорема 2 (П. Франкл и Р. М. Уилсон, [42]). *Пусть p — некоторое простое число, $n = 4p$, $k = 2p$, $t = p$. Тогда*

$$m(n, k, t) \leqslant 2C_{n-1}^{p-1}.$$

Повторим еще раз, что пока сформулирован лишь весьма специальный случай теоремы. Тем не менее уже он не может не производить впечатление (ср. п. 2.3). Правда, немного странным выглядит появление простого числа в формулировке, но оно там существенно, и в этом мы тоже потом убедимся.

2.2. Доказательство теоремы Франкла—Уилсона

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ — это совокупность k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, где $k = 2p$, $n = 4p$, причем никакие два множества $M_i, M_j \in \mathcal{M}$ не пересекаются ровно по p элементам из $\mathcal{R}_n$. Сперва мы применим простой технический трюк. Рассмотрим отдельно те множества из $\mathcal{M}$, которые содержат элемент $1 \in \mathcal{R}_n$, и отдельно — те множества, которые этот элемент не содержат. Таким образом, совокупность $\mathcal{M}$ распадется на две непересекающиеся подсовокупности — скажем,

$$\mathcal{M}_1 = \{M \in \mathcal{M} \colon 1 \in M\}$$

и

$$\mathcal{M}_2 = \{M \in \mathcal{M} \colon 1 \notin M\}.$$

Если нам удастся показать, что $|\mathcal{M}_\nu| \leqslant C_{n-1}^{p-1}$, $\nu = 1, 2$, то утверждение теоремы 2 будет обосновано. На самом деле все равно, с какой из двух совокупностей работать в дальнейшем. Дабы не загромождать текст одинаковыми рассуждениями, мы проведем их во всех подробностях лишь для $\mathcal{M}_2$. А уж разобраться с аналогичными выкладками для $\mathcal{M}_1$ заинтересованный читатель сможет без труда. К тому же так и метод будет понятнее. К нему мы теперь и перейдем.

Итак, мы можем считать отныне, что наша новая совокупность

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_2 = \{N_1, \ldots, N_s\}$$

состоит из k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n \setminus \{1\}$, которое ничто не мешает нам отождествить с $\mathcal{R}_{n-1} = \{1, \ldots, n-1\}$. При этом

$$\left|N_i \cap N_j\right| \neq p \quad \text{для любых } i, j \in \{1, \ldots, s\}.$$

Нетривиальная идея, которую мы будем реализовывать, сводится к тому, чтобы k-элементным подмножествам $\mathcal{R}_{n-1}$ сопоставить некоторую матрицу и векторное пространство размерности не более C_{n-1}^{p-1}, порожденное ее строками. Если нам удастся сделать это достаточно хитро, то затем мы сумеем так преобразовать нашу матрицу, что мощность совокупности $\mathcal{N}$ окажется не превосходящей ранга новой матрицы, а он, в свою очередь, будет не выше размерности нашего векторного пространства, т. е. как раз ожидаемой нами величины C_{n-1}^{p-1}. В этом суть линейно-алгебраического метода, но как ее воплотить в жизнь? Ниже мы ответим на поставленный вопрос.

Пусть $A_1, \ldots, A_{C_{n-1}^j}$ — это все возможные j-элементные подмножества, а $B_1, \ldots, B_{C_{n-1}^i}$ — это все возможные i-элементные подмножества в $\mathcal{R}_{n-1}$. Будем считать, что $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, и потенциальное равенство нулю величин i и j никого не должно смущать: «ноль-элементные подмножества» какого-либо множества — это ровно одно его пустое подмножество, и мы просто доопределим значения биномиальных коэффициентов, полагая (стандартно) $C_m^0 = \dfrac{m!}{m!\,0!} = 1$ и, более того, $C_m^l = 0$, коль скоро $l > m$, $m \geqslant 0$ (в частности, даже $C_0^0 = 1$, а, например, $C_3^5 = 0$).

Рассмотрим прямоугольную матрицу $\Lambda(i, j)$ размера C_{n-1}^i (число строк) на C_{n-1}^j (число столбцов), у которой (u, v)-й элемент $\lambda_{u,v}(i, j)$ равен единице, если $B_u \subseteq A_v$, и нулю в противном случае. Здесь индексы u и v меняются в естественных пределах:

$$1 \leqslant u \leqslant C_{n-1}^i, \quad 1 \leqslant v \leqslant C_{n-1}^j.$$

Понятно, что матрица $\Lambda(i, j)$ будет квадратной только при $i = j$: она тогда единичная, т. е.

$$\Lambda(i, j) = E(i, j) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

но это не страшно. Кроме того, $i \leqslant j$, так что из одних нулей матрица состоять не будет. Заметим, что в науке матрицы, состоящие из нулей и единиц, принято называть $(0, 1)$-матрицами.

Пусть $i = p - 1$, а $j = k$. Возьмем векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{C_{n-1}^{p-1}}$, образованные строками матрицы $\Lambda(p - 1, k)$. Эти векторы суть вершины C_{n-1}^k-мерного «единичного куба», и они уж заведомо лежат в $\mathbb{R}^{C_{n-1}^k}$. Мы можем «натянуть» на векторы $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{C_{n-1}^{p-1}}$ подпространство пространства $\mathbb{R}^{C_{n-1}^k}$. Получится «плоскость» Π, размерность которой, очевидно, не превосходит числа ее образующих, т. е. величины C_{n-1}^{p-1}. Вот они — матрица и векторное пространство. Остается немного «пожонглировать» [1] ими.

Лемма 1. *При любом $i \in \{0, \dots, p - 1\}$ выполнено соотношение*

$$\Lambda(i, p - 1)\Lambda(p - 1, k) = C_{k-i}^{p-1-i}\Lambda(i, k).$$

Доказательство леммы 1. Во-первых, заметим, что умножение матриц, стоящих в левой части соотношения, заявленного в лемме, определено корректно: число столбцов в $\Lambda(i, p - 1)$ совпадает с числом

[1] Любопытно, что один из авторов теоремы — Петер Франкл — много лет жил в Японии и зарабатывал там, в частности, ... жонглированием. Приехав в сентябре 2013 года в Москву и делая доклад по комбинаторике на научном семинаре в Яндексе, он периодически переходил от жонглирования комбинаторными идеями к жонглированию разными предметами. Франкл — признанный во всем мире математик, академик Венгерской Академии Наук. А когда-то он был победителем Международной математической олимпиады!

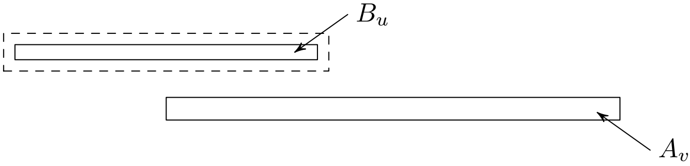


Рис. 1

строк в $\Lambda(p-1, k)$. Разумеется, размер результирующей матрицы должен и впрямь совпадать с размером матрицы $\Lambda(i, k)$, т. е. с величиной $C_{n-1}^i \times C_{n-1}^k$. Надо бы еще с элементами наших матриц определиться. Если u-е i-элементное подмножество B_u не содержится в v-м k-элементном подмножестве A_v множества $\mathcal{R}_{n-1}$, то (u, v)-й элемент $\lambda_{u,v}(i, k)$ матрицы $\Lambda(i, k)$ равен нулю. Однако при тех же условиях никакое $(p-1)$-элементное подмножество $\mathcal{R}_{n-1}$, содержащее B_u, тем более не может быть вложенным в A_v (см. рис. 1). Значит, в этом случае и при перемножении матриц на позиции с номером (u, v) возникнет ноль. В противном случае (u-е i-элементное подмножество B_u вложено в v-е k-элементное подмножество A_v множества $\mathcal{R}_{n-1}$) единиц при перемножении матриц возникнет столько же, сколько есть различных $(p-1)$-элементных подмножеств $\mathcal{R}_{n-1}$, лежащих, так сказать, «между» B_u и A_v (см. рис. 2). Ясно, что таковых подмножеств в точности C_{k-i}^{p-1-i} штук, и лемма 1 доказана. $\square$

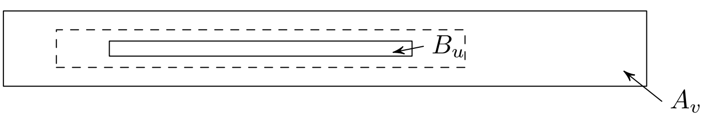


Рис. 2

Из леммы 1 мгновенно следует принадлежность вектор-строк матрицы $\Lambda(i, k)$, $i = 0, \ldots, p-1$, пространству Π. Справедлива

Лемма 2. *При любом $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ имеет место соотношение*

$$\Lambda(i, k)^T \Lambda(i, k) = \Gamma(i, k).$$

Здесь верхний индекс T означает операцию транспонирования, а $\Gamma(i, k)$ — это матрица размера $C_{n-1}^k \times C_{n-1}^k$, элементы которой имеют вид

$$\gamma_{u,v}(i, k) = C_{|A_u \cap A_v|}^i, \quad 1 \leqslant u, v \leqslant C_{n-1}^k \quad (|A_u| = |A_v| = k).$$

Доказательство леммы 2 мало отличается от доказательства леммы 1, и мы оставляем его читателю. Заметим только, что биномиальный коэффициент ввиду сделанных нами выше оговорок корректно определен даже в ситуациях, когда мощность пересечения k-элементных множеств A_u, A_v меньше i. Для нас главное, что вектор-строки матрицы $\Gamma(i, k)$ при каждом $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ суть линейные комбинации вектор-строк матрицы $\Lambda(i, k)$, которые, как мы знаем благодаря лемме 1, лежат в плоскости Π. Таким образом, и строки $\Gamma(i, k)$, $i = 0, \ldots, p-1$, являются элементами нашего векторного пространства.

Лемма 3. *При любом целом неотрицательном x выполнено соотношение*

$$\prod_{i=1}^{p-1}(i-x) \equiv \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^{j+1}C_x^j \pmod p.$$

Доказательство леммы 3. При $x = 0$ имеем в левой части искомого соотношения величину $(p-1)!$. По известной теореме Вильсона (см. [3], хотя это почти очевидно) $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. В то же время в правой части соотношения есть только $-C_0^0 = -1$, так что пока все в порядке. Если $x \in \{1, \ldots, p-1\}$, то слева стоит просто ноль. Вместе с тем справа возникает сумма вида

$$\sum_{j=0}^{x}(-1)^{j+1}C_x^j = -(1-1)^x = 0,$$

и значит, вновь проблем нет. Наше соотношение оказалось верным при всех возможных остатках от деления x на p (как говорят, при всех *вычетах по модулю* p). Нетрудно убедиться в том (см. [3]), что оно, таким образом, справедливо всегда. Лемма 3 доказана. $\square$

Рассмотрим $\Gamma = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{i+1}\Gamma(i, k)$ (матрицы складываются покомпонентно). Тогда (u, v)-й элемент $\gamma_{u,v}$ матрицы Γ выглядит так:

$$\gamma_{u,v} = \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{i+1}C^i_{|A_u \cap A_v|}.$$

Матрица Γ — квадратная, и определена она так, что ее вектор-строки принадлежат пространству Π. Значит,

$$\operatorname{rank}\Gamma \leqslant \dim \Pi \leqslant C_{n-1}^{p-1}.$$

Пусть теперь $\Gamma(\mathcal{N})$ — это минор, порожденный элементами $\gamma_{u,v}$, в которых A_u, $A_v \in \mathcal{N}$ (такие у нас, безусловно, имеются, ведь и мощности

A_u, A_v, и мощности множеств из совокупности $\mathcal{N}$ равны k). По лемме 3 в этом миноре

$$\gamma_{u,v} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} C^i_{|A_u \cap A_v|} \equiv \prod_{j=1}^{p-1} (j - |A_u \cap A_v|).$$

Коль скоро множества A_u, A_v лежат в $\mathcal{N}$, мощность их пересечения заведомо находится в пределах от единицы до $k = 2p$ (не пересекаться они не могут, так как мы их с самого начала именно ради этого загнали в $\mathcal{R}_{n-1}$). Однако она и p по условию теоремы не равняется. Следовательно, $|A_u \cap A_v| \equiv 0 \pmod p$ тогда и только тогда, когда $A_u = A_v$ (т. е. $u = v$). Таким образом, как нетрудно видеть (и здесь важна простота p), $\gamma_{u,u} \not\equiv 0 \pmod p$, в то время как $\gamma_{u,v} \equiv 0 \pmod p$ при $u \neq v$ (разумеется, мы не выходим за пределы минора). Отсюда, опять-таки за счет простоты p, вытекает неравенство $\det \Gamma(\mathcal{N}) \not\equiv 0 \pmod p$, влекущее за собой неравенство $\det \Gamma(\mathcal{N}) \neq 0$. Получается, что

$$|\mathcal{N}| = \operatorname{rank} \Gamma(\mathcal{N}) \leqslant \operatorname{rank} \Gamma \leqslant C^{p-1}_{n-1},$$

и теорема доказана. □

2.3. Точность теоремы Франкла—Уилсона и ее неожиданность

Если предыдущий раздел был насыщен идеями, то нынешний носит скорее технический характер. В этом плане он довольно скучен, но зато мы увидим, насколько глубокий результат был получен Франклом и Уилсоном даже в той специальной формулировке, которую мы пока что знаем. Основным нашим инструментом будет известная формула Стирлинга для факториала, утверждающая, что

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Здесь $\pi = 3{,}1415\ldots$, $e = 2{,}7182\ldots$, а значок «$\sim$» говорит о том, что формула асимптотическая, т. е.

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \to 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Покажем сначала, насколько удивительна оценка в теореме, а именно, попытаемся понять, как устроена величина $2C^{p-1}_{n-1}$. Напомним, что

$p = n/4$. Итак,

$$2C_{n-1}^{p-1} = 2\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{4}-1\right)!\left(\frac{3n}{4}\right)!} = 2\frac{n/4}{n}\frac{n!}{\left(\frac{n}{4}\right)!\left(\frac{3n}{4}\right)!} \sim$$
$$\sim \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi\frac{n}{4}}\left(\frac{n}{4}\right)^{n/4} e^{-n/4}\sqrt{2\pi\frac{3n}{4}}\left(\frac{3n}{4}\right)^{3n/4} e^{-3n/4}}.$$

Очевидно, все экспоненты (степени числа e) уничтожаются, сокращаются также и величины вида $n^{\gamma n}$. Остается выражение

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi n}}\left(\frac{4}{3^{3/4}}\right)^n = \left(\frac{4}{3^{3/4}} + o(1)\right)^n = (1{,}754\ldots + o(1))^n.$$

Получается, что мощность любой совокупности $2p$-элементных подмножеств $4p$-элементного множества, удовлетворяющей всего одному запрету на мощность пересечения своих элементов (эта мощность не может совпадать с p), не превосходит $(1{,}754\ldots + o(1))^n$. Однако едва мы снимаем запрет, и количеству множеств уже ничто не мешает достичь величины

$$C_n^{n/2} = \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{\left(\sqrt{2\pi\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-\frac{n}{2}}\right)^2} = (2 + o(1))^n.$$

Поразительно: один-единственный запрет — и такие последствия. Если спросить любого неспециалиста в области комбинаторики, какого бы он ожидал результата, то очень маловероятно, что он предположил бы подобное. Более того, автору попадались математики, до последнего не верившие в столь необычное явление, и только доказательство разубеждало их.

Теперь обсудим точность теоремы. Для ясности изложения мы докажем, что теорема «практически» точна. Вернее, мы предъявим совокупность $\mathcal{M}$, имеющую все надлежащие свойства и такую, вместе с тем, что $|\mathcal{M}| = (1{,}754\ldots + o(1))^n$. Иными словами, если в чем и будет различие между оценкой Франкла—Уилсона и значением $|\mathcal{M}|$, так это в величине бесконечно малого. Разобьем множество $\mathcal{R}_n$ на две равные части $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}^1 \sqcup \mathcal{R}^2$, где

$$\mathcal{R}^1 = \left\{1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}, \quad \mathcal{R}^2 = \left\{\frac{n}{2} + 1, \ldots, n\right\},$$

а значок «$\sqcup$» подчеркивает, что мы имеем дело с *дизъюнктным объединением*, то есть с объединением непересекающихся множеств.

Пусть $N = C_{n/2}^{[3n/8]+1}$,

$$\mathcal{M}^1 = \{M_1^1, \ldots, M_N^1\}$$

— совокупность всех возможных $([3n/8]+1)$-элементных подмножеств в $\mathcal{R}^1$, а

$$\mathcal{M}^2 = \{M_1^2, \ldots, M_N^2\}$$

— совокупность всех возможных $(n/2-[3n/8]-1)$-элементных подмножеств в $\mathcal{R}^2$. Понятно, что и впрямь

$$|\mathcal{M}^1| = |\mathcal{M}^2| = N.$$

Целая же часть берется от дроби $3n/8$ неспроста: ведь n не обязано делиться на 8. Впрочем, у нас $n/4 = p$, где p простое, так что делимости на 8 заведомо нет, и тут уместно заметить, что простота величины $n/4$ нам нигде в дальнейшем не понадобится: конструкция совокупности, предъявить которую мы стремимся, более обща, нежели теорема Франкла—Уилсона.

Возьмем каждое множество вида

$$M_i^1 \sqcup M_j^2, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Получится $s = N^2$ множеств $M_1, \ldots, M_s$, имеющих мощности $n/2$. Более того,

$$\left|M_i \cap M_j\right| > \frac{n}{4}$$

для любых $i, j \in \{1, \ldots, s\}$, что отрадно. Остается лишь осознать, почему $s = (1{,}754\ldots + o(1))^n$. Воспользуемся опять-таки формулой Стирлинга и заметим, что

$$\left[\frac{3n}{8}\right] = \frac{3n}{8} - \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon \in [0, 1).$$

Положим $\kappa = 1 - \varepsilon$.

$$|\mathcal{M}| = N^2 = \left(C_{n/2}^{[3n/8]+1}\right)^2 \sim$$

$$\sim \left(\frac{\sqrt{2\pi\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2}}{\sqrt{2\pi\left(\frac{3n}{8}+\kappa\right)}\left(\frac{3n}{8}+\kappa\right)^{\frac{3n}{8}+\kappa} e^{-\frac{3n}{8}-\kappa}\sqrt{2\pi\left(\frac{n}{8}-\kappa\right)}\left(\frac{n}{8}-\kappa\right)^{\frac{n}{8}-\kappa} e^{-\frac{n}{8}+\kappa}}\right)^2.$$

Рассмотрим отдельно величину $\left(\frac{3n}{8}+\kappa\right)^{\frac{3n}{8}+\kappa}$. Она равна

$$\left(\frac{3n}{8}\right)^{\frac{3n}{8}+\kappa}\left(1+\frac{\kappa}{3n/8}\right)^{\frac{3n}{8}+\kappa}.$$

Понятно, что с точностью до сомножителей «полиномиального» порядка роста или убывания (таких, которые можно оценить сверху многочленом от n и снизу единицей, поделенной на многочлен от n) мы имеем дело с величиной $(3n/8)^{3n/8}$. Аналогичное наблюдение имеет место в других похожих случаях. Посему, обозначая через $P(n)$ функцию, составленную из сомножителей полиномиального порядка, получаем

$$|\mathcal{M}| \sim P(n)\left(\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}}{\left(\frac{3n}{8}\right)^{3n/8}\left(\frac{n}{8}\right)^{n/8}}\right)^2 = (1{,}754\ldots + o(1))^n.$$

Совокупность $\mathcal{M}$ доставляет нам искомый пример. Стоит заметить, однако, что в ней множества удовлетворяют даже более сильному ограничению, чем требовалось: их пересечение не только не совпадает с $n/4$, но также не может быть и меньше этой величины. Выходит, запретить множествам пересекаться ровно по $n/4$ общим элементам и не более чем по $n/4$ общим элементам — это, по сути, одно и то же? Один запрет дает тот же результат, что и $n/4$ запретов? Не следует, конечно, забывать, что для верхней оценки величины $m(n, k, t)$ мы использовали нетривиальное условие простоты числа t, и все же результат поразителен.

На самом деле задачи о запрете одного и нескольких пересечений — разные, и мы расскажем, в частности, об этом в следующем параграфе.

2.4. Вокруг теоремы Франкла—Уилсона

Начнем с общей формулировки теоремы Франкла—Уилсона.

Теорема 3 (П. Франкл и Р. М. Уилсон, [42]). *Пусть $k \leqslant \frac{n}{2}$ и $k-t$ — степень некоторого простого числа. Если $k \geqslant 2t+1$, то $m(n,k,t) \leqslant \leqslant C_n^{k-t-1}$. Иначе, полагая $d = 2t-k+1$, имеем*

$$m(n,k,t) \leqslant \frac{C_n^d C_{n-d}^{t-d}}{C_k^d}.$$

Давайте поймем, насколько широка область применения теоремы 3. Во-первых, убедимся в том, что теорема 2 есть весьма специальный ее случай. В самом деле, если $n = 4p$, $k = 2p$, $t = p$, то, безусловно, $k - t = p$ — это (первая) степень простого числа, и мы сразу видим, что теорема 3 шире теоремы 2: в ней, вообще говоря, степень может не быть первой. Далее, $k = 2p < 2t + 1 = 2p + 1$, и, стало быть, нам следует обратиться ко второй части утверждения теоремы 3. Поскольку $d = 1$, из нее вытекает неравенство

$$m(n, k, t) \leqslant \frac{n}{k} C_{n-1}^{t-1} = 2C_{n-1}^{p-1},$$

и все в порядке. В то же время ясно, что использовать теорему 3 можно гораздо чаще. Мало того, что, как мы уже отмечали, простота «запрета» не является принципиальным ограничением, так еще и k, t вовсе не обязаны принимать столь конкретные значения, какие они имели в теореме 2. Лишь бы разность мощности множества и величины запрещенного пересечения была степенью простого. И все — это линейно-алгебраический метод, аналогичный тому, что мы подробно изложили в п. 2.2.

Между прочим, и теорема Ж. Надя мгновенно следует из теоремы 3 — правда, в чуть-чуть ослабленной формулировке. Действительно, там $k = 3$, $t = 1$, и, значит, $k - t = 2$ — степень простого. К тому же $k = 3 \leqslant 2t + 1 = 3$, в результате чего $m(n, 3, 1) \leqslant C_n^1 = n$. Индукция давала слегка более точную формулировку, повязанную на остатки от деления числа n на 4, но зато здесь совершенно общий метод. Помните, мы говорили, что уже отыскание величины $m(n, 5, 2)$ было большой проблемой? Теперь и думать не о чем: метод моментально свидетельствует о том, что $m(n, 5, 2) \leqslant C_n^2$, а это при «кустарных» подходах казалось запредельным. Тем более, что оценка почти точна. Если, например, взять совокупность пятиэлементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, у которых первые три элемента из $\mathcal{R}_n$ (элементы $1, 2, 3$) общие, то в этой совокупности будет как раз $C_{n-3}^2 \sim C_n^2$ элементов: разница, как и в п. 2.3, лишь на уровне бесконечно малых величин. Заметим, что вопрос о точности теоремы Франкла—Уилсона в совершенно произвольной ситуации отнюдь не прост, и его мы обсудим в п. 2.5. Еще одна неприятность состоит в необходимости работать со степенями простых чисел. Это большая проблема, и до сих пор с ней бороться не научились. Впрочем, с точки зрения многих приложений наличие подобного ограничения не критично. Дело в том, что простых чисел (и тем более их степеней) «очень много», — а именно, они достаточно плотно встречаются в натуральном ряде. Строго говоря, как многие знают, между x и $2x$ обязательно есть простое число. Это старый постулат Бертрана, и к настоящему времени имеются куда более точные результаты.

Одна из тяжелейших проблем *аналитической теории чисел*, в область интересов которой входит, в частности, и вопрос о распределении простых чисел внутри натурального ряда, состоит в отыскании как можно более точных оценок на такую функцию $f(x)$, что при $x \geqslant x_0$ между x и $x + f(x)$ заведомо найдется простое число. Гипотеза состоит в том, что в качестве $f(x)$ можно взять $O(\sqrt{x}(\log x)^\gamma)$ с некоторым $\gamma > 0$. Однако даже самые мощные современные методы анализа дают лишь результаты типа

$$f(x) = O(x^\delta), \quad \text{где } \delta > \frac{1}{2}.$$

К примеру, $\delta = 0{,}525$ (см. [38]) вполне подходит, а дотянуть δ до половины пока не удается. Оценка $f(x) = O(x^{0,525})$ неоправданно сложна, да нам, по сути, она нигде и не понадобится. Нам достаточно понимать, что $f(x) = o(x)$, а это может быть получено из классического *асимптотического закона распределения простых чисел*, доказанного еще в 1896 году Ж. Адамаром и Ш. Ж. Валле Пуссеном (см. [4]): *количество $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих x, есть выражение вида*

$$\pi(x) = (1 + o(1))\frac{x}{\ln x}.$$

Мы не станем утверждать, что теорема Адамара—Валле Пуссена легкая, но в ней при желании разобраться можно за разумное время. Для нас главное, что в сколь угодно малой «окрестности» любого числа есть простое (не говоря уж о его степени), а значит, теорема Франкла—Уилсона в некотором естественном смысле применима «почти всегда». Это не устраняет необходимости борьбы с «непростыми» запретами на мощности пересечения множеств, но демонстрирует силу линейно-алгебраического метода. К тому же упомянутые теоремы аналитической теории чисел нам пригодятся в будущем.

Вот еще пара красивых теорем, доказанных Франклом и Уилсоном с помощью линейной независимости.

Теорема 4 (П. Франкл и Р. М. Уилсон, [42]). *Пусть $q = p^\alpha$ — это степень некоторого простого числа. Рассмотрим произвольную совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$, состоящую из k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$ и обладающую свойством:*

$$\left|M_i \cap M_j\right| \not\equiv k \pmod q$$

для любых $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Тогда $s = |\mathcal{M}| \leqslant C_n^{q-1}$.

Теорема 5 (П. Франкл и Р. М. Уилсон, [42]). *Пусть $0 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_r \leqslant n$ — некоторые целые числа. Рассмотрим совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$, состоящую из подмножеств произвольной мощности в $\mathcal{R}_n$ и обладающую свойством:*

$$\left|M_i \cap M_j\right| \in \{l_1, \ldots, l_r\}$$

Литература

[1] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. Мир, 2006.

[2] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.

[3] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

[4] *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.

[5] *Гольдштейн В. Б.* О проблеме Борсука для $(0,1)$- и $(-1,0,1)$-многогранников в пространствах малой размерности // Труды МФТИ. 2012. Т. 4., вып. 1. С. 91—110.

[6] *Горская Е. С., Митричева И. М., Протасов В. Ю., Райгородский А. М.* Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации // Мат. сборник. 2009. Т. 200, вып. 6. С. 3—22.

[7] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[8] *Звонарев А. Е., Райгородский А. М., Самиров Д. В., Харламова А. А.* Улучшение теоремы Франкла—Рёдля о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Доклады РАН. 2014. Т. 457, вып. 2. С. 144—146.

[9] *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. М.: Мир, 1988.

[10] *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Радио и связь, 1979.

[11] *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Новые оценки в задаче о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения // Проблемы передачи информации. 2013. Т. 49, вып. 4. С. 98—104.

[12] *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства // УМН. 2013. Т. 68, вып. 5. С. 183—184.

[13] *Пономаренко Е. И., Райгородский А. М.* Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 1. С. 138—147.

[14] *Райгородский А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // УМН. 1999. Т. 54, вып. 2. С. 185—186.

[15] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // УМН. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 107—146.

[16] *Райгородский А. М.* Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.

[17] *Райгородский А. М.* О нижних оценках чисел Борсука и Хадвигера // УМН. 2004. Т. 59, вып. 3. С. 177—178.

[18] *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства с l_q-нормой // УМН. 2004. Т. 59, вып. 5. С. 161—162.

[19] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2015.

[20] *Райгородский А. М., Абсалямова М. И.* Нижняя оценка хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$ с k запрещенными расстояниями и метрикой l_1 // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 4(20). С. 105—113.

[21] *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. 2007. (Современная математика; Т. 23). С. 147—164.

[22] *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007. 136 с.

[23] *Райгородский А.,М., Шитова И. М. (Митричева)* О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями // Мат. сборник. 2008. Т. 199, вып. 4. С. 107—142.

[24] *Райгородский А.,М., Шитова И. М. (Митричева)* О хроматических числах евклидова пространства и о проблеме Борсука // Матем. заметки. 2008. Т. 83, вып. 4. С. 636—639.

[25] *Райгородский А. М., Шитова И. М. (Митричева)* О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями // Мат. сборник. 2008. Т. 199, вып. 4. С. 107—142.

[26] *Райгородский А. М., Китяев М. М.* Об одной серии задач, связанных с проблемами Борсука и Нелсона—Эрдеша—Хадвигера // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 2. С. 254—272.

[27] *Райгородский А. М., Шабанов Д. А.* Задача Эрдеша—Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // УМН. 2011. Т. 66, вып. 5. С. 109—182.

[28] *Райгородский А. М., Харламова А. А.* О совокупностях $(-1, 0, 1)$-векторов с запретами на величины попарных скалярных произведений // Труды по векторному и тензорному анализу. Т. 29. М.: изд-во МГУ, 2013. С. 130—146.

[29] *Скворцов В. А.* Примеры метрических пространств. М.: МЦНМО, 2002.

[30] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.; Ижевск: Физматлит, 2003.

[31] *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.

[32] *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

[33] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[34] *Эрдёш П., Спенсер Дж.* Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.

[35] *Aigner M., Ziegler G.M.* Proofs from THE BOOK. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[36] *Aigner M., Ziegler G.M.* Proofs from THE BOOK. 4 ed. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

[37] *Ahlswede R., Khachatrian L. H.* The complete intersection theorem for systems of finite sets // Europ. J. Combin. 1997. Vol. 18. P. 125—136.

[38] *Baker R. C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes, II // Proceedings of the London Mathematical Society. 2001. Vol. 83. P. 532—562.

[39] *Cherkashin D. D., Kozik J.* A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs. Random Structures & Algorithms, 2014.

[40] *Chevalley C.* Demonstration d'une hypothèse de M. Artin // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg (in French). 1935. Vol. 11. P. 73—75.

[41] *Erdős P., Ginzburg A., Ziv A.* Theorem in the additive number theory // Bull. Res. Council Israel. 1961. Vol. 10. P. 41—43.

[42] *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. Vol. 1. P. 357—368.

[43] *Graham R. L.*, *Rothschild B. L.*, *Spencer J. H.* Ramsey theory. N. Y.: John Wily and Sons, 1990. 2nd ed.

[44] *Hilton A. J. W.*, *Milner E. C.* Some intersection theorems for systems of finite sets // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1967. Vol. 18. P. 369—384.

[45] *Kleitman D. J.* Families of non-disjoint subsets // J. of Combin. Theory. 1966. Vol. 1. P. 153—155.

[46] *Kupavskii A. B.* On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm // Discrete Math. 2011. Vol. 311. P. 437—440.

[47] *Larman D. G.*, *Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. Vol. 19. P. 1—24.

[48] *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number // Matematikai Lapok. 1972. Vol. 23, № 301—302. P. 26.

[49] *Peres Y.*, *Schlag W.* Two Erdős problems on lacunary sequences: Chromatic number and Diophantine approximation // Bull. Lond. Math. Soc. 2010. Vol. 42, № 2. P. 295—300.

[50] *Raigorodskii A. M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Mathematical Intelligencer. Vol. 26. 2004. № 4. P. 4—12.

[51] *Raigorodskii A. M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. 2007. Vol. 347. P. 202—248.

[52] *Raigorodskii A. M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed. Springer, 2013. P. 429—460.

[53] *Raigorodskii A. M.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. 2014. (AMS, Contemporary Mathematics; Vol. 625). P. 93—109.

[54] *Warning E.* Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg (in German). 1936. Vol. 11. P. 76—83.

[55] *Ziegler G. M.* Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1 — Borsuk problem in low dimensions // Lect. Notes Comput. Sci. 2001. Vol. 2122. P. 159—171.

Новинки издательства МЦНМО:

http://biblio.mccme.ru/publications/books/status/novelties

Интернет-партнеры:

http://globalf5.com/search/founded/type/book/area/publisher/stype/extended/q/МЦНМО

http://www.litres.ru/mcnmo/

Магазин «Математическая книга» при издательстве:

http://biblio.mccme.ru/shop

Описания, обсуждения, ответы на вопросы:

https://vk.com/matematura