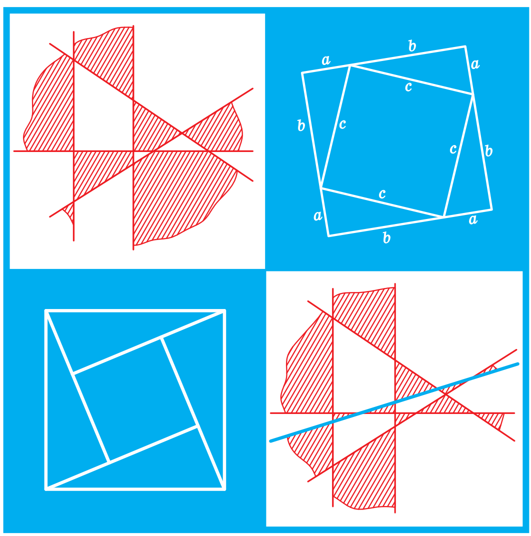
Библиотека
«Математическое просвещение»

В. А. Успенский

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2012

Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»

Выпуск 34

В. А. Успенский

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Второе издание, стереотипное

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2012

УДК 511.1
ББК 22.130
У77

Успенский В. А.

У77 Простейшие примеры математических доказательств. — 2-е изд., стереотипное. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 56 с.

ISBN 978-5-94057-879-6

В брошюре доступным неспециалистам языком рассказывается о некоторых из основополагающих принципов, на которых строится наука математика: чем понятие математического доказательства отличается от понятия доказательства, принятого в других науках и в повседневной жизни, какие простейшие приёмы доказательства используются в математике, как менялось со временем представление о «правильном» доказательстве, что такое аксиоматический метод, в чём разница между истинностью и доказуемостью.

Для очень широкого круга читателей, начиная со школьников старших классов.

Первое издание книги вышло в 2009 году.

ББК 22.130

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»

Успенский Владимир Андреевич

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Выпуск 34

Серия основана в 1999 году

Редактор *М. Г. Быкова*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано к печати 13/IX 2011 г. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Объём 3,50 (вкл.) печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-879-6

МАТЕМАТИКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Даже незнакомый с математикой человек, взяв в руки книгу по математике, может, как правило, сразу определить, что эта книга действительно по математике, а не по какому-нибудь другому предмету. И дело не только в том, что там обязательно будет много формул: формулы есть и в книгах по физике, по астрономии или по мостостроению. Дело в том, что в любой серьёзной книге по математике непременно присутствуют *доказательства*. Именно доказуемость математических утверждений, наличие в математических текстах доказательств — вот что нагляднее всего отличает математику от других областей знания.

Первую попытку охватить единым трактатом всю математику предпринял древнегреческий математик Евклид в III веке до нашей эры. В результате появились знаменитые «Начала» Евклида. А вторая попытка состоялась только в XX веке н. э., и принадлежит она французскому математику Никол́я Бурбаќи[1], начавшему в 1939 году издавать многотомный трактат «Начала математики». Вот какой фразой открывает Бурбаки свой трактат: «Со времён греков говорить „математика" — значит говорить „доказательство"». Таким образом, «математика» и «доказательство» — эти два слова объявляются почти синонимами.

Казалось бы, можно возразить, что доказательства встречаются и в других сферах — скажем, в юриспруденции. Например, в суде каждая из спорящих сторон предъявляет свои доказательства (причём доказательства одной стороны нередко противоречат доказательствам другой стороны). Однако все согласны, что математические доказательства гораздо убедительнее тех, которые произносятся в судах.

Доказательства, собственно, встречаются во всех науках, даже в науках гуманитарных. Приведу два примера: первый из исторической науки, второй — из филологии.

[1]На самом деле такого математика не существует. Никол́я Бурбаќи — это коллективный псевдоним группы математиков, подобно тому как «Козьма Прутков» — коллективный псевдоним группы писателей (но только, в отличие от группы Бурбаки, группы постоянного состава). Сказанное не послужило препятствием ни тому, чтобы г-н Бурбаки имел свой почтовый ящик на Международном съезде математиков в Москве в 1966 г. (причём почта из ящика исправно забиралась), ни тому, чтобы он получил гонорар, выписанный ему издательством «Мир» за осуществлённое в 1965 г. издание русского перевода первого тома его трактата. Рассказывают, что когда Американское математическое общество выпустило справочник, в котором Бурбаки был назван псевдонимом группы математиков, возмездие последовало незамедлительно: в одной из публикаций Бурбаки президент Американского математического общества был назван точно так же.

Первые шаги в науке великого российского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) были сделаны не в математике, а в истории[1] и относились к истории Новгородской земли XV века.

Колмогоровские разыскания содержали, в числе других достижений, ответ на вопрос, как брался налог с селений Новгородской земли — с селения в целом или же с каждого его двора. Опровергая господствующее мнение, Колмогоров доказал, что налог брался с селения в целом. Доказательство состояло в том, что в противном случае правило налогообложения должно было бы быть чересчур сложным. Проведённый Колмогоровым анализ новгородских писцовых книг, в которых наряду с другими сведениями записывались сведения о налогообложении, привёл к следующим результатам. Налог с больших селений всегда брался в целых единицах, к тому же в большинстве случаев — в круглых цифрах. Налог со средних селений брался, в основном, также в целых единицах. Налог с небольших селений мог составлять как целое, так и дробное число налоговых единиц, но это дробное число всегда имело вид целого числа с половиной. Более того, во многих случаях, когда налог с небольших селений брался в целых единицах, дворов в селении оказывалось больше, чем число налоговых единиц, взымаемых с селения. Кажется невероятным, чтобы налог был подворным и его ставки были столь хитроумны, чтобы достигнуть таких числовых эффектов!

Теперь пример из филологии. Долгое время предметом ожесточённых спекуляций служил вопрос о подлинности «Слова о полку Игореве», то есть вопрос о том, создано ли оно в XII—XIV веках, что и означает подлинность, или же является подделкой, относящейся, скорее всего, к XVIII веку. Андрей Анатольевич Зализняк (только личное знакомство с ним мешает мне назвать его великим лингвистом) доказал подлинность «Слова». Доказательство опирается на анализ раскрытых Зализняком тончайших закономерностей древнерусского языка. Невероятно, чтобы мог

[1] Над рукописями своих исторических исследований Колмогоров начал работать, когда ему было семнадцать с половиной лет, а закончил их в 1922 г., когда ему ещё не было девятнадцати. В то время он был студентом Московского университета. Эти рукописи долгое время считались утерянными, они были найдены и опубликованы лишь после смерти Колмогорова в книге: *Колмогоров А. Н. Новгородское землевладение XV в. Бассалыго Л. А. Коммментарий к писцовым книгам Шелонской пятины.* — М.: Физматлит, 1994. (Да, книга имеет такое сложное библиографическое описание. Она состоит из двух самостоятельных сочинений, имеющих каждое своего автора.) После опубликования колмогоровские рукописи по истории получили высокую оценку специалистов.

существовать такой фальсификатор, который не только знал бы эти закономерности, иные из коих были обнаружены лишь недавно, но и скрыл своё знание от современников! (Это при том, что, как известно, незнание можно скрыть, знание скрыть невозможно.)

В обоих наших рассказах о доказательствах в гуманитарных науках мы употребили слово *невероятно*, а не слово *невозможно*. Дело в том, что в обоих случаях всё-таки остаётся некоторая, пусть весьма малая, вероятность того, что в действительности налог был подворным, а «Слово» — подделкой. Требуется ли ещё уменьшать эту вероятность? На мой взгляд, в приведённых примерах не требуется — но этот взгляд субъективен. И если кто-нибудь потребует сделать вероятность опровержения открытий, сделанных Колмогоровым и Зализняком, ещё ничтожнее, против этого будет трудно возразить. Вот, например, как реагировал на сообщение Колмогорова известный историк С. В. Бахрушин, когда работа была рассказана на занятиях его семинара в Московском университете. Пишет известный археолог, руководитель новгородской археологической экспедиции В. Л. Янин:

> Когда работа была доложена им [Колмогоровым] на семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как «в исторической науке каждый вывод должен быть обоснован несколькими доказательствами»(!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика навсегда приобрела его.

Думается, позиция Бахрушина имеет следующее объяснение. Он привык к тому, что обычно применяемые в исторической науке доказательства допускают, каждое в отдельности, ощутимую вероятность того, что доказанное утверждение не соответствует действительности; а посему, для уменьшения этой вероятности, требуется несколько доказательств. Возможно, он впервые услышал доказательство, уже в единственном числе делающее указанную вероятность пренебрежимо малой, — услышал, но не осознал.

Вернёмся, однако, к математике. Математические доказательства повсеместно признаются эталоном бесспорности. Выражения вроде «я тебе докажу математически», встречающиеся в русской классической литературе, призваны продемонстрировать доказательство, которое нельзя оспорить.

Но что же такое доказательство? Доказательство — это рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других *с помощью этого же рассуждения*. Так понимается доказательство всюду — и в истории, и в филологии, и в математике. Во избежание недоразумений и возможного возмущения просвещённых читателей (если таковые найдутся среди читателей этого текста) отметим, что есть и другое понимание того, что такое доказательство. По Бурбаки, например, доказательство — это цепочка символов, организованная по определённым правилам. Мы обсудим это другое понимание в заключительном разделе книги. Полагаем, однако, что наше понимание не является чем-то оригинальным, а отражает то стандартное употребление слова *доказательство*, которое имеет место и в средней, и в высшей школе. Те математические объекты, которые называет доказательствами Бурбаки, разумно называть *формальными доказательствами* — в отличие от содержательных, психологических доказательств, о которых мы здесь говорим. Формальные доказательства составляют предмет изучения математической логики. Заметим ещё, что, на наш взгляд, и Бурбаки не может избежать содержательных доказательств: ведь чтобы убедиться, что данная цепочка символов является формальным доказательством, требуется провести содержательное рассуждение, то есть именно психологическое доказательство.

Отличие математического доказательства от доказательств в других науках состоит в том, что в математике порог убедительности значительно выше. Можно сказать, что математические и нематематические доказательства имеют разные амбиции. Нематематические доказательства претендуют на то, чтобы убедить в следующем: доказываемое утверждение имеет место с подавляющей вероятностью, а предположение, что это не так, невероятно. Математические доказательства претендуют на то, чтобы убедить в следующем: доказываемое утверждение имеет место с необходимостью, а предположение, что это не так, невозможно. Так, уже отмечалось, что в приведённых выше примерах из истории и филологии оставалась возможность, пусть совершенно невероятная, что в действительности дело обстояло иным образом. И даже демонстрация нескольких доказательств, как того требовал Бахрушин, всего лишь повысила бы степень невероятности, но не превратила бы её в невозможность. В математических же доказательствах *невероятность* противоположного эффекта — то есть допущения того, что доказанное утверждение неверно, — заменяется на *невозможность*. Поэтому в математических доказательствах убедительность должна быть абсолютной, не оставляющей никакой возможности для противоположного суждения.

Предвидим протест или, по меньшей мере, удивление некоторых читателей. Как же так, такое важное математическое понятие, как доказательство, а имеет такое нечёткое определение — да и вообще не определение, а описание, пояснение. На это у нас два возражения. Во-первых, даже и в математике всё определить невозможно: ведь одни понятия определяются через другие, другие через третьи, и т. д. Но этот процесс не может продолжаться бесконечно. Поэтому мы вынуждены где-то остановиться. Во-вторых, понятие доказательства не есть математическое понятие (подобное, скажем, понятию действительного числа или понятию многоугольника); по отношению к математике оно не *внутреннее*, а *внешнее* и принадлежит не математике, а психологии (и отчасти лингвистике). Однако невозможно представить себе современную математику без повсеместного использования этого понятия.

Можно ли предложить разумную классификацию всевозможных доказательств, то есть убедительных рассуждений? Вряд ли. Тем более, что доказательство, как правило, состоит из нескольких (иногда очень многих) этапов, и на каждом этапе применяется свой способ убеждения. Можно, однако, среди схем доказательства выделить несколько часто повторяющихся; ниже некоторые из таких схем будут изложены. Чтобы не дезориентировать читателя, сделаем два предупреждения.

Предупреждение первое. Было бы глубоким заблуждением считать, что других методов доказательства не бывает! Да и само выделение схем достаточно условно. Ведь нередко случается, что одна схема «залезает» внутрь другой — скажем, внутри доказательства по индукции может встретиться доказательство от противного или наоборот.

Предупреждение второе. Все примеры, которые будут приведены ниже, содержат лишь очень простые и короткие доказательства. Многие доказательства, встречающиеся в математической науке, и гораздо сложнее, и гораздо длиннее: их длина может измеряться десятками, сотнями и даже тысячами страниц. Поясним, откуда могут взяться эти тысячи. Дело в том, что каждое доказательство опирается на какие-то факты, и если включить в него и полные доказательства всех этих фактов, то тут-то и могут потребоваться тысячи страниц.

О ТОЧНОСТИ И ОДНОЗНАЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Прежде чем продолжить разговор о доказательствах, необходимо сказать несколько слов о математической терминологии.

Убедительность математических доказательств поддерживается отчётливостью, недвусмысленностью математических утверждений. Когда, например, говорят, что один общественный строй более прогрессивен, чем другой, то не вполне ясно, что в точности это означает. А вот когда говорят, что две прямые пересекаются, то ни у кого не возникает сомнения в смысле этих слов.

Для того чтобы математические суждения воспринимались как точные и недвусмысленные, необходимо, прежде всего, чтобы таковыми были те понятия, которые в этих суждениях используются. Суждения облекаются в словесную форму в виде предложений, а понятия — в виде терминов. Таким образом, каждый термин должен иметь ровно один точно очерченный смысл. Скажем несколько слов о том, что происходит в реальности с математическими терминами.

Надо признать, что точность смысла реально достигается лишь в профессиональных и высокоучёных математических текстах, в повседневной же практике — отнюдь не всегда. Чем точнее очерчен смысл термина — тем убедительнее использующие этот термин доказательства. Однозначности значений терминов также, к сожалению, не наблюдается.

Возьмём, к примеру, такой распространённый термин, как *многоугольник*. Он понимается по-разному — и как любая замкнутая ломаная, и как несамопересекающая замкнутая ломаная (и то, и другое ещё надо определять!), и как часть плоскости, ограниченная ломаной. Если вдуматься, то слова «часть плоскости, ограниченная ломаной» нуждаются в разъяснении, а тот факт, что такая часть существует, — ещё и в доказательстве, каковое оказывается довольно непростым (сам этот факт представляет собой частный случай так называемой *теоремы Жордана*, говорящей не только о ломаных, но и о замкнутых линиях вообще). Тем не менее именно в таком, достаточно наглядном и потому оставляемом без разъяснения, смысле термин *многоугольник* понимается в этой книге (а потому все приведённые здесь рассуждения о многоугольниках убедительны лишь постольку, поскольку ясен смысл термина).

Или возьмём термин *угол*. Вот несколько различных смыслов этого термина:

(1) два луча, исходящих из одной точки;

(2) угол в смысле (1) плюс одна из двух частей, на которые им разбивается плоскость;

(3) поворот луча;

(4) мера угла в смысле (1) (так понимается этот термин, когда говорят о сумме углов треугольника или произвольного выпуклого многоугольника);

(5) мера угла в смысле (2) (так понимается этот термин, когда говорят о сумме углов произвольного многоугольника, не обязательно выпуклого);

(6) мера угла в смысле (3) (так понимается этот термин, когда говорят об отрицательных углах и об углах, больших или равных $360°$).

Заметим, что соотнесение углу как геометрической фигуре его меры как числа представляет собою, с позиций Высокой Науки, довольно сложную процедуру.

В дальнейшем изложении встретятся три важных неоднозначных термина. Это термины *натуральное число*, *натуральный ряд* и *равнó*.

Возможны два понимания того, что такое натуральное число, отличающиеся друг от друга в одном пункте: считать ли нуль натуральным числом. В школьных учебниках понятие натурального числа обычно выводят из пересчёта предметов, и потому натуральный ряд начинают с единицы. Но можно понимать натуральное число и как количество элементов какого-либо конечного множества. Поскольку одним из конечных множеств является пустое множество, вовсе не содержащее никаких элементов (например — множество ныне живущих динозавров), а количество элементов пустого множества есть нуль, то — при этом втором понимании — и наименьшее натуральное число есть нуль. При первом понимании понятие натурального числа совпадает с понятием целого положительного числа, при втором — с понятием целого неотрицательного числа. Подчеркнём, что каждое из указанных двух понятий имеет совершенно точное, недвусмысленное содержание, а двусмысленность заключается в терминологии, поскольку каждое претендует на то, чтобы его называли «натуральным числом». Чтобы избежать неясностей, первое понятие можно было бы называть *считательным натуральным числом*, а второе — *количественным натуральным числом*.

Натуральный ряд — это, по определению, множество всех натуральных чисел. Сообразно сказанному, есть два понятия натурального ряда: для одного из них натуральный ряд начинается с нуля, для другого — с единицы.

Каждая из двух точек зрения на то, что понимать под терминами *натуральное число* и *натуральный ряд*, имеет свои преимущества. Которую из них выбрать — дело вкуса. Но какую-то надо выбрать обязательно. Потому что невозможно ни говорить о доказательствах, ни тем более доказывать что-нибудь, не договорившись о значениях терминов. Чтобы не слишком уклоняться от школьной терминологии, мы будем начинать натуральный ряд с единицы. Впрочем, в некоторых из приводимых ниже примеров на тему «Индукция» удобнее относить к натуральным числам и ноль. Желающих начинать натуральный ряд с нуля призываем слегка переделать последующее изложение метода индукции — а именно, в базисе индукции надо положить $n=0$ вместо $n=1$.

Теперь о слове *равно́*. Основное значение этого термина в математике таково: говорят, что два предмета равны, если они совпадают. Именно этот смысл вкладывается и в выражающий равенство символ «$=$». Когда, например, пишут

$$3+5=8,$$

то эту запись понимают как выражающую такое утверждение: *предмет, обозначенный символом* «$3+5$» *совпадает с предметом, обозначенным символом* «8». Казалось бы, никакое иное понимание и невозможно. К сожалению, возможно, и оно хорошо известно читателю. Это иное понимание появляется в школьном курсе геометрии. Там равными фигурами называют фигуры, которые могут и различаться, но совпадут после того, как одну из них переместить и совместить с другой. Именно так понимается, скажем, равенство отрезков AB и EF или треугольников ABC и EFG. И эти равенства записывают в виде $AB=EF$ и $\triangle ABC=\triangle EFG$ — так что смысл знака «$=$» здесь не тот, какой был указан выше.

Более грамотно было бы называть фигуры, совпадающие при совмещении, *конгруэнтными* и использовать для записи конгруэнтности не знак равенства «$=$», а специальный знак «$\cong$». Однако, чтобы не делать изложение излишне учёным, мы не будем употреблять ни термина *конгруэнтный*, ни знака «$\cong$», а довольствоваться школьной традицией (не такой уж, впрочем, и устойчивой, поскольку одно время в советских школах использовался именно термин «конгруэнтный»).

Итак, запись

$$AB = EF$$

вовсе не означает (а должна бы!), что отрезки AB и EF совпадают. Но что-то всё же при этом совпадает, а именно, их, отрезков, длины. Под психологическим давлением этого обстоятельства и длину отрезка AB нередко обозначают точно так же, как и сам отрезок, то есть посредством символа AB. И можно встретить такую запись известного неравенства, связывающего стороны треугольника:

$$AC < AB + BC.$$

Но это уже не лезет ни в какие ворота, и в этой книге длина отрезка AB будет обозначаться так, как ей и положено: $|AB|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МЕТОДОМ ПЕРЕБОРА

Пример 1. Требуется доказать, что среди целых неотрицательных чисел, меньших числа́ 420, нет других корней уравнения

$$(x + 2008)(x - 3)(x - 216)(x - 548) = 0,$$

кроме чисел 3 и 216.

Доказательство: последовательно перебирая числа 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, ..., 213, 214, 215, 217, 218, 219, ..., 417, 418, 419 и подставляя их в уравнение, убеждаемся, что ни одно из них не обращает в нуль левую часть. Это есть типичное *доказательство методом перебора*. □

«Зачем же поступать так странно?» — возмутится читатель. Ведь достаточно опереться на следующее свойство произведения: если произведение равно нулю, то непременно равен нулю хотя бы один из сомножителей. Действительно, из указанного свойства вытекает, что если число является корнем нашего уравнения, то оно есть либо -2008, либо 3, либо 216, либо 548, а из этих четырёх чисел только 3 и 216 одновременно неотрицательны и меньше, чем 420. Читатель совершенно прав: его доказательство короче. Однако мы призываем читателя осознать тот факт, что предложенное нами доказательство совершенно убедительно, — а значит, совершенно безупречно. Кроме того, наше доказательство хотя и длиннее, но в определённом смысле проще: ведь оно не предполагает использования указанного выше свойства произведения. Представьте себе, что это свойство кому-либо неизвестно; тогда этот «кто-либо» поймёт наше доказательство, но не поймёт доказательства читателя. Мы преследовали и ещё одну, практическую цель: приучить читателя не бояться доказательств методом перебора. Ведь хотя осуществление доказательства методом перебора может потребовать времени намного большего, чем проведение какого-нибудь хитроумного короткого доказательства, зато поиск такого хитроумного короткого доказательства может затянуться надолго...

Пример 2. Требуется доказать, что среди трёхзначных чисел нет числа, делящегося одновременно на 7, 11 и 13. Школьник младших классов, знакомый лишь с делением, может справиться с этой задачей, перебрав и испробовав все 900 трёхзначных чисел. Школьник старших классов знает (точнее — должен знать), что среди натуральных чисел выделяются *простые числа* и что *простым* называется всякое такое натуральное число, которое, во-первых, больше единицы и, во-вторых, делится только на единицу и на само себя. Так что числа 7, 11 и 13 — простые. А ежели школьник ещё более образован, то он знает, что число, делящееся на каждое из нескольких простых чисел, обязано делиться и на их произведение. Произведение $7 \cdot 11 \cdot 13$ равно 1001. Но никакое трёхзначное число не может делиться на 1001. □

Пример 3. Представим себе, что мы выдвинули такую гипотезу: уравнение $x^4+y^4=z^2$ не имеет решения в целых положительных числах, не превосходящих числа 100. В действительности указанное уравнение не имеет решения ни в каких целых положительных числах, так что наша гипотеза верна. Доказательство теоремы о неразрешимости нашего уравнения в целых положительных числах вполне элементарно. Так что в принципе читатель может доказывать гипотезу одним из двух способов. Первый способ: перебрать все десять тысяч пар $\langle x, y\rangle$, таких что $1 \leqslant x \leqslant 100$, $1 \leqslant y \leqslant 100$, возвести для каждой такой пары её составляющие в четвёртую степень, сложить и убедиться, что сумма не является полным квадратом. Второй способ: попытаться самостоятельно получить доказательство теоремы о неразрешимости уравнения. Второй способ труден, первый способ скучен. Конечно, можно поручить осуществление первого способа компьютеру; однако ведь можно взять вместо верхней границы 100 другую, настолько бóльшую, что и компьютеру перебор будет не под силу. Сейчас мы приведём реальный пример перебора, с которым не в состоянии справиться современные компьютеры. □

Пример 4. В 1742 г. российский математик Христиан Гольдбах выдвинул такую гипотезу: всякое натуральное число n, начиная с шести, есть сумма трёх простых чисел. Для небольших n гипотезу Гольдбаха можно проверить непосредственно; например,

$96=2+47+47$. С другой стороны, для очень больших *нечётных* чисел гипотеза тоже верна: как доказал в 1937 году И. М. Виноградов, гипотеза Гольдбаха верна для всех нечётных n, больших некоторого громадного n_0. Что касается самого этого n_0, то из анализа доказательства Виноградова вытекало, что в качестве n_0 можно взять, например, число $3^{14348907}$, требующее свыше шести с половиной миллионов знаков для своей десятичной записи. Оставалось, таким образом, проверить все нечётные числа от 7 до названного числа, и *для нечётных чисел* гипотеза Гольдбаха окажется либо доказанной, либо опровергнутой. Однако такая проверка совершенно нереальна. В 1989 г. китайские математики Ван и Чен понизили рубеж n_0 до числа, требующего всего лишь примерно 43 тысяч десятичных знаков для своей записи. Но и это число слишком велико для того, чтобы проверка оказалась в наши дни возможной — даже с помошью самой современной вычислительной техники. Есть серьёзные основания полагать, что осуществить столь большой перебор не удастся никогда. Остаётся надеяться, что со временем будет найдено другое, меньшее значение для n_0. $\square$

Пример 5. Целые числа вида n^2+1 обладают следующим свойством: у них не бывает простых делителей вида $4k+3$. Если перед читателем встанет задача проверить это свойство для предъявленного ему множества значений n (в другом варианте — для одного, но большого значения n), то что́ читатель предпочтёт — решать задачу перебором или же искать в математической литературе доказательство общей теоремы относительно чисел вида n^2+1, а то и пытаться самому сочинить такое доказательство? $\square$

КОСВЕННЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Самый естественный способ доказать, что объект с заданными свойствами действительно существует, — это его указать, назвать, построить (и, разумеется, убедиться, что он действительно обладает нужными свойствами). Чтобы доказать, например, что данное уравнение имеет решение, достаточно указать какое-то его решение. Такие доказательства существования чего-нибудь называются *прямыми* или *конструктивными*. Прямыми будут, например, приводимые в примерах 17 и 18 доказательства существования несоизмеримых отрезков, поскольку такая пара отрезков будет там указана.

Но бывают и *косвенные* доказательства, когда обоснование того факта, что искомый объект существует, происходит без прямого указания такого объекта.

Пример 6. В некоторой шахматной партии противники согласились на ничью после 15-го хода белых. Требуется доказать, что какая-то из чёрных фигур ни разу не передвигалась с одного поля доски на другое. (Термин «фигура» понимается здесь в широком смысле, включающем и пешки.) Рассуждаем так. Передвижения чёрных фигур по доске происходят лишь при ходах чёрных. Если такой ход не есть рокировка, передвигается одна фигура; если же ход есть рокировка, передвигаются две фигуры. Чёрные успели сделать 14 ходов, и лишь один из них мог быть рокировкой. Поэтому самое большое количество чёрных фигур, затронутых ходами, есть 15. А всего чёрных фигур 16. Значит, по крайней мере одна из них не участвовала ни в каком ходе чёрных. Отметим, что здесь мы не указываем такую фигуру конкретно (мы могли бы это сделать лишь в случае, если бы наблюдали шахматную партию или располагали её записью), а лишь доказываем, что она непременно существует. □

Пример 7. В самолёте летит 380 пассажиров. Докажите, что какие-то два из них отмечают свой день рождения в один и тот же день года. Рассуждаем так. Всего имеется 366 (включая 29 февраля) возможных дат для празднования дня рождения. А пассажиров больше; значит, не может быть, чтобы у всех у них дни рождения приходились на различные даты, и непременно случится так, что какая-то дата является общей по крайней мере для двух человек. Ясно, что этот эффект будет обязательно наблюдаться, начиная с 367 пассажиров. А вот при 366 пассажирах не исключено, что даты (числа и месяцы) их дней рождения будут для всех различны, хотя это и чрезвычайно маловероятно. (Кстати, теория вероятностей учит, что если случайно выбранная группа людей состоит более чем из 22 человек, то более вероятно, что у кого-нибудь из них будет общий день рождения, нежели что у всех у них дни рождения приходятся на разные дни года.) □

Логический прием, применённый нами в примере 7, носит название «*принцип Дирихлé*» — по имени знаменитого немецкого математика XIX в. Петера Густава Лежёна Дирихлé. Вот общая формулировка этого принципа:

> если имеется n ящиков, в которых находятся в общей сложности по меньшей мере $n+1$ предметов, то непременно

ОГЛАВЛЕНИЕ

Математика и доказательства 3
О точности и однозначности математических терминов 8
Доказательства методом перебора 11
Косвенные доказательства существования. Принцип Дирихле 13
Доказательства способом «от противного» 17
Принципы наибольшего и наименьшего числа и метод бесконечного спуска 19
Индукция 27
    Доказательства методом математической индукции 27
    Полная индукция и неполная индукция 35
Представление о математических доказательствах меняется со временем 38
Два аксиоматических метода — неформальный и формальный 43
    Неформальный аксиоматический метод 43
    Формальный аксиоматический метод 46
    Теорема Гёделя 51

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

1. В. М. Тихомиров
Великие математики прошлого и их великие теоремы

2. А. А. Болибрух
Проблемы Гильберта (100 лет спустя)

3. Д. В. Аносов
Взгляд на математику и нечто из неё

4. В. В. Прасолов
Точка Брокара и изогональное сопряжение

5. Н. П. Долбилин
Жемчужины теории многогранников

6. А. Б. Сосинский
Мыльные плёнки и случайные блуждания

7. И. М. Парамонова
Симметрия в математике

8. В. В. Острик, М. А. Цфасман
Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые

9. Б. П. Гейдман
Площади многоугольников

10. А. Б. Сосинский
Узлы и косы

11. Э. Б. Винберг
Симметрия многочленов

12. В. Г. Сурдин
Динамика звёздных систем

13. В. О. Бугаенко
Уравнения Пелля

14. В. И. Арнольд
Цепные дроби

15. В. М. Тихомиров
Дифференциальное исчисление (теория и приложения)

16. В. А. Скворцов
Примеры метрических пространств

17. В. Г. Сурдин
Пятая сила

18. А. В. Жуков
О числе π

19. А. Г. Мякишев
Элементы геометрии треугольника

20. И. В. Ященко
Парадоксы теории множеств

21. И. Х. Сабитов
Объёмы многогранников

22. А. Л. Семёнов
Математика текстов

23. М. А. Шубин
Математический анализ для решения физических задач

24. А. И. Дьяченко
Магнитные полюса Земли

25. С. М. Гусейн-Заде
Разборчивая невеста

26. К. П. Кохась
Ладейные числа и многочлены

27. С. Г. Смирнов
Прогулки по замкнутым поверхностям

28. А. М. Райгородский
Хроматические числа

29. С. Б. Гашков
Системы счисления и их применение

30. Ю. П. Соловьёв
Неравенства

31. В. Ю. Протасов
Максимумы и минимумы в геометрии

32. А. В. Хачатурян
Геометрия Галилея

33. А. М. Райгородский
Проблема Борсука

34. В. А. Успенский
Простейшие примеры математических доказательств

35. И. Д. Жижилкин
Инверсия

36. А. М. Райгородский
Остроугольные треугольники Данцера—Грюнбаума

37. В. В. Ерёмин
Математика в химии

Новинки издательства МЦНМО:

http://biblio.mccme.ru/publications/books/status/novelties

Интернет-партнеры:

http://globalf5.com/search/founded/type/book/area/publisher/stype/extended/q/МЦНМО

http://www.litres.ru/mcnmo/

Магазин «Математическая книга» при издательстве:

http://biblio.mccme.ru/shop

Описания, обсуждения, ответы на вопросы:

https://vk.com/matematura