М. С. Вербицкий

Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

УДК 515.12
ББК 22.152
В31

Книга вышла при поддержке гранта РНФ (Соглашение № 14-21-00053 от 11.08.14).

Вербицкий М. С.

В31 Начальный курс топологии в листочках: задачи и теоремы. — М.: МЦНМО, 2017. — 352 с.

ISBN 978-5-4439-1036-9

Книга написана по материалам лекций, прочитанных в Независимом московском университете и на факультете математики Высшей школы экономики, и состоит из записок лекций и упражнений, предлагавшихся студентам. В курс включены результаты общей топологии, широко применяемые в анализе и геометрии. Для удобства читателя приводятся необходимые понятия и результаты теории категорий и теории множеств. Книга заканчивается начальными главами гомотопической топологии (накрытия, фундаментальная группа). Теоретический материал курса изложен как в лекциях, так и в упражнениях, которые можно изучать независимо от лекций.

ББК 22.152

Портреты математиков на с. 54, 156, 160, 167, 172, 193, 221, 274, 331 выполнены Юрием Сопельняком.

Научное издание

Михаил Сергеевич Вербицкий

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ТОПОЛОГИИ В ЛИСТОЧКАХ: ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ

Подписано в печать 15.12.2016 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 22. Тираж 1500 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“». 121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-4439-1036-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II. ТОПОЛОГИЯ В ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ III. ЛЕКЦИИ ПО ТОПОЛОГИИ

ВВЕДЕНИЕ

Краткое описание

Эта книга рассчитана на студента младших курсов, знакомого с основами математического мышления (хорошего школьного учебника математики достаточно).

Можно читать ее по частям или целиком; например, решать задачи, пропуская текст лекций. «Геометрическая» часть задач и лекций (первый том) не очень связана с алгебраической (второй том, готовится к печати), а лекции (часть III) дополняют листки с задачами (часть II). Задачи разбиты на две группы (простые задачи без звездочки и сложные — со звездочкой), можно решать либо все простые задачи, либо все сложные, либо и те и другие.

Настоящая книга является первой частью записок курса, программа которого в немалой степени основана на программе матшколы и содержит материал, который в общих чертах известен хорошему матшкольнику. Предполагается, что полный курс будет состоять из двух частей, алгебры и геометрии. В этом томе читатель найдет задачи и лекции по геометрии и топологии. В приложении приводятся необходимые определения и задачи по основам анализа (определение поля вещественных чисел).

Геометрия (1-й том)

0. Метрические пространства. Последовательности Коши, пределы, пополнение метрических пространств. Теорема Хопфа—Ринова. Геодезические в полных метрических пространствах. Векторные пространства с нормой.
1. Теоретико-множественная топология (определение непрерывных отображений, компактность, отделимость, счетная база).
2. Лемма Урысона и теорема о метризации нормального топологического пространства со счетной базой.
3. Теорема Тихонова о компактности, равномерная сходимость, теорема Арцела—Асколи. Конструкция кривой Пеано.
4. Фундаментальная группа, свободные группы, гомотопическая эквивалентность, накрытия Галуа, конструкция универсального накрытия.

Алгебра (2-й том)

0. Группы, кольца, поля. Действительные и комплексные числа. Теорема Евклида—Гаусса об однозначности разложения на простые множители. Решение простейших диофантовых уравнений.
1. Конечномерные векторные пространства. Базис, размерность. Билинейные, полилинейные формы, двойственные пространства. Определение тензорного произведения векторных пространств. Симплектические и квадратичные формы.
2. Грассманова алгебра и определители.
3. Линейные операторы. Полупростота, нильпотентность. Теорема Кэли—Гамильтона. Жорданова нормальная форма.
4. Алгебраические расширения полей. Артиновы коммутативные алгебры. Расширения Галуа.
5. Представления конечных групп.
6. Основная теорема теории Галуа.

Последние 3—4 листка по геометрии и по алгебре повторяют друг друга, местами дословно. Дело в том, что группа Галуа устроена аналогично фундаментальной группе, а накрытие топологического пространства — конечному расширению полей. Пользуясь этой аналогией, Гротендик построил фундаментальную группу, пользуясь только алгебраическими методами (этот раздел математики называется *этальной геометрией*).

В. И. Арнольд прочел основанный на этой аналогии курс теории Галуа в физико-математической школе-интернате 18; впоследствии его лекции были записаны В. Б. Алексеевым («Теорема Абеля в задачах и решениях»).

В силу того что методы топологии и алгебры в этих разделах столь схожи, теорию Галуа, фундаментальную группу и накрытия можно (и нужно) изучать по одному плану. Взаимовлияние алгебраических и геометрических идей — это магистральное направление всей математики (а в последнее время — и теоретической физики), а математик, который владеет только одним из этих аппаратов, не лучше инвалида.

Материал этой книги должен быть в общих чертах известен хорошему матшкольнику и продвинутому первокурснику-математику.

Кроме этого, первокурсник должен знать основы анализа; их можно почерпнуть в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ» и в учебнике Лорана Шварца «Анализ».

В этой книге анализа нет, потому что (в отличие от алгебры и геометрии) его преподавание на первом курсе университета ведется весьма интенсивно и начала анализа непрерывных и гладких функций на прямой худо-бедно усваивает каждый студент. К тому же изложить математический анализ в задачах не так просто.

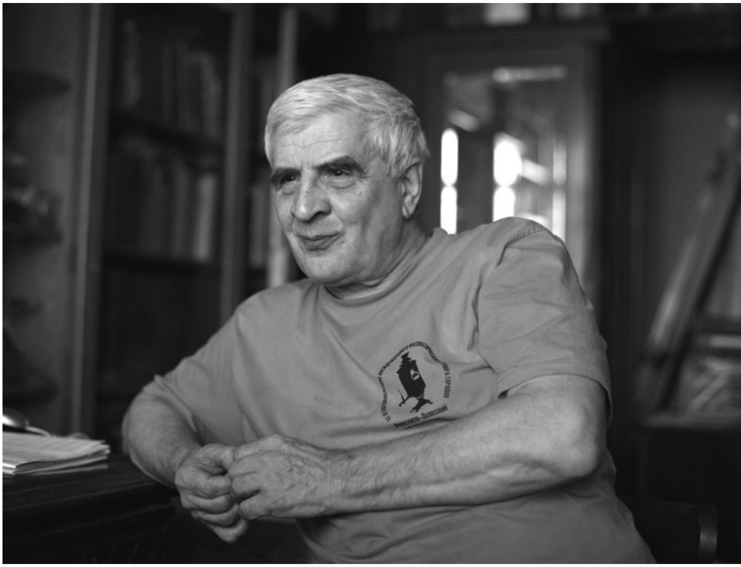
Соавтором и редактором листочков с задачами был Дмитрий Каледин, которому я безмерно благодарен. Спасибо Марине Прохоровой за редакторскую работу над задачами и А. Х. Шеню за ряд ценных замечаний. Немало исправлений было получено от Виктора Прасолова и Ивана Ремизова, которым я донельзя благодарен, а также от других людей, тоже чрезвычайно достойных и замечательных. Отдельная благодарность студентам, без которых это сочинение не было бы даже начато.

Структура книги отражает программу, составленную А. Х. Шенем, В. А. Гинзбургом и другими преподавателями matкласса 57 школы, где учился автор. Другим источником идей и вдохновения были учебники «Теорема Абеля в задачах и решениях» В. Б. Алексеева и «Теоремы и задачи функционального анализа» А. А. Кириллова и А. Д. Гвишиани.

Матклассы: обучение по листочкам

В 1970-е гг. в московских матшколах кристаллизовалась необычная форма обучения математике. Ее возникновение обыкновенно связывают с именем Н. Н. Константинова, который работал в 57, 91 и 179 школах. По этой системе выучились сотни матклассов, и каждый преподаватель вносил нечто свое в программу и в подход к обучению. Самым известным на настоящий момент практиком матшкольного обучения по листочкам является Б. М. Давидович, завуч московской школы 57; автора этой книги учили А. Х. Шень, В. А. Гинзбург, Б. П. Гейдман и А. Ю. Вайнтроб, и он благодарен им сверх всякой меры.

Здесь был бы уместен исторический очерк матшкольного образования, но пока придется ограничиться этим куцым сообщением. Автор заранее приносит извинения всем, кого он не упомянул.



Николай Николаевич Константинов

Система эта в канонической форме устроена так. Обучение математике в матклассе разбито на два параллельных предмета. Обычная математика (алгебра и геометрия) преподается в рамках школьной программы, при этом форма обучения не отличается от привычной чиновникам РОНО и проверяющим комиссиям. Параллельно с этим профессиональные математики, аспиранты и студенты, не числящиеся формально учителями, ведут уроки «специальной математики», или же «match». Часы делятся примерно поровну, но само обучение «специальной математике» мало соотносится со школьной программой, и занятия устроены принципиально иначе.

На уроках «специальной математики» никто не стоит у доски с указкой и мелом; всё (или почти всё) общение школьника с преподавателями ведется за партой и тет-а-тет либо в походах. Школьникам выдается листок с задачами, обыкновенно — по одному или два в неделю; через какое-то время после выдачи листочка студенты должны «сдать задачи», т. е. рассказать их решения преподавателям на уроке. При такой системе на класс из 30 человек требуется где-то 5—10 преподавателей.

Задачи разбиты на задачи «без звездочки» (сдача этих задач обязательна для всех) и более сложные задачи, отмеченные одной или двумя звездочками. Задачи с одной звездочкой должны быть доступны самым продвинутым школьникам в классе. Задачи с двумя звездочками весьма сложны — уровня студенческих научных олимпиад либо сложных (а часто и нерешенных) научных проблем. Для индивидуального обучения эта система весьма удобна — школьник может выбирать себе задачи по плечу, решая либо сравнительно простые задачи, доступные начинающим, либо задачи со звездочкой, требующие хорошего понимания материала.

Преподаватели подбираются из числа энтузиастов подобного обучения, профессиональных математиков и студентов; в основном это выпускники матклассов. Они разъясняют школьникам непонятные места. Также школьникам не возбраняется находить решение задач в книжках либо (когда совсем припрет) спрашивать у товарищей. Принято считать, что эта часть обучения не менее важная, чем собственно решение задач. Действительно, свободное обращение с литературой и способность рассказать либо выслушать нечто математическое не менее важна, чем решение задач.

Объем информации, усваиваемый школьником при такой системе, вполне сравним с полученным из обычной школьной системы обучения, несмотря на отсутствие «уроков» в обычном смысле. Теоретический материал размещается по возможности в тексте задач, таким образом, любой школьник, успешно сдавший задачи, будет обязан усвоить и освоить теорию.

На протяжении 1980-х гг. программа матклассов установилась окончательно. В общих чертах идеализированная программа матшколы устроена примерно так.

Обучение ведется 3 или 4 года. В первый год школьники учатся обращению с множествами (элементарной теории множеств, классам эквивалентности, отображениям, наложениям, вложениям и биекции, равномощности, счетным и континуальным множествам). Излагаются начала аксиоматического подхода. Определяются понятия элементарной алгебры: группы, кольца и поля. Вводится алгоритм Евклида, его используют для доказательства однозначности разложения на множители в кольце целых чисел.

На второй год школьники изучают основы анализа (пределы, ряды, непрерывность и дифференцируемость функций на прямой), свойства логарифма и экспоненты. Излагается аксиоматическое определение вещественных чисел (обыкновенно через последовательности Коши). Проходят комплексные числа и их геометрическую интерпретацию. Выводят из свойств комплексных чисел тождества для тригонометрических функций, как обычные (формула косинусов и синусов), так и необычные (формула для $\sin(nx)$ и т. д.). Также изучают начала линейной алгебры (конечномерные пространства, базис, размерность).

На третий год школьники изучают основы теории метрических пространств (компактность, пополнение) и топологии (аксиоматическое определение топологического пространства, топологические свойства метрических пространств, аксиомы отделимости). В курсе алгебры школьники усваивают определение p-адических чисел, классификацию конечных полей и элементы теории Галуа.

Как читать эту книгу

В этой книге есть две независимые части, основанные на одной и той же программе: цикл лекций и цикл задач. Они в немалой степени повторяют друг друга. По сути это два разных курса, излагающих один и тот же материал.

Листочки составлены таким образом, чтобы решение всех задач со звездочкой из одного листка было несколько менее трудоемко, чем решение всех задач без звездочки из этого же листка. Студенту имеет смысл прочесть все задачи и усвоить их формулировку, затем решить все задачи со звездочкой, если задачи без звездочки для них не трудны и их решение кажется бессмысленной затратой труда. Задачи с восклицательным знаком надо решать всем.

Таким образом, каждый листочек представляет собой сразу два курса — один для продвинутых студентов, которые в общих чертах знают программу, другой — для начинающих.

Формально говоря, для понимания листочков достаточно школьной программы и знания основных определений теории множеств (вложение, наложение, ограничение отображения, классы эквивалентности). Многие школьные учебники (например, учебник Колмогорова) уже содержат все нужные определения.

Для решения некоторых задач со звездочкой (особенно в конце курса геометрии) и хорошего понимания остального материала необходимо немного подробнее ознакомиться с теорией множеств, в частности, научиться пользоваться леммой Цорна. Об этом см. главу 4 части I.

Остальные лекции читать не обязательно, для владения материалом вполне достаточно прорешать задачи. С другой стороны, пытаться решать задачи подряд и в изоляции от преподавателей и товарищей тоже не очень полезно — всегда есть риск застопориться на какой-то тривиальной вещи и застрять надолго. В нормальной учебной обстановке такая проблема решается просто: надо спросить другого студента или преподавателя. Если их нет, надо походить, подумать, почитать книжку, попробовать изучить контекст, подумать о том, как исторически возникли такие вещи в математике. Проще всего выяснить это (если знать английский язык), сделав поиск на нужные ключевые слова в Интернете. Но в случае, если Интернет не работает, или если это слишком трудно, или просто чтобы отдохнула голова, можно посмотреть лекции, сопутствующие этому листочку. Они адресованы студенту, которому задач недостаточно, но читать их можно и независимо.

Также в лекциях содержится английский перевод ключевых слов и краткий список литературы, полезной для данного предмета.

Важное замечание. В чтении книг по математике есть две проблемы, которые не возникают при очном обучении. Первая проблема — опечатки: большинство научных книг содержат опечатки, и немало. Студент или школьник, не готовый к этому, может провести несколько месяцев в попытках придать смысл заявлению, которое смысла не имеет, потому что сделано по ошибке. Дорогие читатели! Никогда не думайте, что автор умнее вас и видит что-то, чего вы не видите. В большинстве случаев дурак не читатель, а автор, который нечто важное исказил, пропустил и напортил.

Никакого вреда в этом нет: чтение книги должно быть занятием творческим; в идеале — совместным творчеством автора и читателя. Для этого некоторые авторы специально добавляют в свои книги опечатки, чтобы студентам было о чем задуматься.

Вторая проблема, тоже весьма неприятная — люди любят читать книги подряд. При этом, дойдя до непонятного места, люди читают это место снова и снова, до полного отупения. Это неправильно! Надо открыть книжку в другом месте и читать там, а непонятное место перечитать потом.

Часть I

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Глава 1

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. О математической строгости

«Точные науки» отличаются от «социо-гуманитарных» тем, что в точных науках утверждение можно проверить воспроизводимым экспериментом либо наблюдением. Роль воспроизводимого наблюдения в математике играет *доказательство*.

Идея доказательства восходит к древним грекам; она дошла до наших дней практически без изменений. Математическая теория строится *аксиоматически*. В основе лежат несколько утверждений — аксиом, принятых как нечто абсолютно верное; всё остальное выводится из аксиом посредством формальной логики.

При таком подходе доказательству подлежат зачастую вещи, интуитивно очевидные. Именно это и называется *математической строгостью*.

На протяжении истории стандарты математической строгости менялись довольно часто. Отказ от строгости в пользу *интуиции, мышления по аналогии* и *эвристических соображений* — дело не всегда вредное. Многие современные математики считают, что принятые в конце XX века стандарты математической строгости (восходящие к Гильберту и к французской группе Бурбаки) излишни. Немало об отрицательном влиянии Гильберта и Бурбаки говорил В. И. Арнольд.

Отчасти он прав — большинство эвристических соображений можно довести до математически строгих доказательств посредством рутинной (и не всегда полезной) работы. Эту точку зрения лучше всего высказали сами Бурбаки («Теория множеств»).

> ...Математик, желающий убедиться в полной правильности, или, как говорят, «строгости» доказательства или теории, отнюдь не прибегает к одной из тех полных формализаций, которыми мы сейчас располагаем, и даже большей частью не пользуется частичными и неполными формализациями, доставляемыми алгебраическим и другими подобными исчислениями. Обыкновенно он довольствуется тем, что

> приводит изложение к такому состоянию, когда его опыт и чутье математика говорят ему, что перевод на формализованный язык был бы теперь лишь упражнением (...) в терпении. Если возникают сомнения, то в конечном счете они относятся именно к возможности прийти без двусмысленности к такой формализации — употреблялось ли одно и то же слово в разных смыслах в зависимости от контекста, нарушались ли правила синтаксиса бессознательным употреблением способов рассуждения, не разрешаемых явно этими правилами, была ли, наконец, совершена фактическая ошибка. (...) Текст редактируется, все больше и больше приближаясь к формализованному тексту, пока, по общему мнению математиков, дальнейшее продолжение этой работы не станет излишним.

Излишняя увлеченность формальными методами, возможно, действительно вредна, но в обучении студентов без математической строгости не обойтись. Профессиональный математик способен легко определить, когда эвристическое рассуждение можно *формализовать*, т. е. довести до любой требуемой степени математической строгости; но эту способность можно приобрести, только упражняясь в получении формально строгих доказательств.

1.2. О формальном методе

Формальный метод восходит к Гильберту, который надеялся, что с его помощью удастся обосновать математику. Его надежды не оправдались из-за теорем Гёделя о неполноте. Но и сейчас формальный метод остается простейшим (и лучше всего развитым) методом построения оснований математики.

Формальная версия математики устроена так. Математическая теория описывает свойства определенных объектов с помощью аксиом и правил вывода. Сущность этих объектов с формальной точки зрения неинтересна: по замечанию Гильберта, *«следует добиться того, чтобы вместо точек, прямых и плоскостей с равным успехом можно было говорить о столах, стульях и пивных кружках»*. Правила вывода суть формальные операции над утверждениями; верным (доказанным) называется такое утверждение, которое можно вывести из аксиом.

Давид Гильберт (David Hilbert, 1862—1943)

Формальный метод подразумевает, что никакой связи между математическим миром и миром, окружающим нас, нет вовсе. В качестве базовых понятий и аксиом можно брать что угодно. Для того чтобы этот метод обоснования математики считался действенным, необходимо (как минимум) доказать, что из использованного набора аксиом нельзя получить противоречия: иначе в этой теории будет верно *любое* утверждение. Действительно, «импликация с ложной посылкой истинна». Это свойство системы аксиом называется *непротиворечивостью*.

Также нужно доказать, что любое утверждение можно доказать либо опровергнуть исходя из аксиом. Это свойство теории называется *полнотой*. В противном случае формальное описание математических объектов неадекватно их сущности.

Дело в том, что математическим объектам можно приписать реальность безотносительно к аксиомам, которые ими описываются. Скажем, аксиомы арифметики описывают теорию чисел, науку о решении диофантовых уравнений (уравнений в целых числах). Утверждение *«полиномиальное уравнение $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ не имеет целочисленных решений $t_1, \ldots, t_n$»* может выводиться из аксиом арифметики (аксиом Пеано), а может и не выводиться. Во втором случае может оказаться, что уравнение имеет решения. Может случиться и так, что из аксиом арифметики невозможно вывести ни наличия, ни отсутствия решений [1].

Когда в какой-то теории есть утверждение Q, которое нельзя вывести из аксиом, и при этом нельзя вывести из аксиом его отрицание «не Q», эта система аксиом называется *неполной*.

«Математической реальности» такая система аксиом, очевидно, неадекватна. Действительно, предположим, что исходя из аксиом Пеано нельзя ни доказать, ни опровергнуть утверждение Q «полиномиальное уравнение $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ не имеет целочисленных решений $t_1, \ldots, t_n$». В этой ситуации уравнение $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ таки не имеет решений, ибо, если бы такое решение было, мы бы могли его подставить в уравнение и получить теорему «Q ложно».

В этой ситуации разговор о числах, апеллирующий к утилитарному пониманию числа, гораздо содержательнее разговора о формальных аксиомах и следствиях. Действительно, формально получить Q как следствие аксиом нельзя, ибо теория неполна; но Q тем не менее верно, что ясно из невозможности его опровергнуть (у уравнения либо нет решений, либо они есть — третьего не дано).

Гильберт надеялся, что система аксиом Пеано (и шире — система аксиом теории множеств, лежавшей в основе математики того времени) полна и непротиворечива. Доказательство этого фактически доказало бы эквивалентность формального метода и утилитарного (основанного на естественно-научной интуиции) представления о числах и о математике.

Этого не случилось.

К концу 1920-х гг. формальная программа Гильберта близилась к завершению. В 1930 г. польский математик Альфред Тарский развил систему аксиом для элементарной геометрии, более формальную и строгую, чем у Гильберта, и доказал, что эта система аксиом полна и непротиворечива.

Но в самом начале 1930-х гг. совершенно неожиданно Курт Гёдель доказал две теоремы о неполноте, которые не оставили камня на камне от программы Гильберта.

1 Это утверждение известно как «Десятая проблема Гильберта». Оно было доказано Юрием Матиясевичем в 1970 году.

Гёдель доказал, что ни одна достаточно богатая (например, содержащая среди своих аксиом аксиомы Пеано) формальная теория не может быть полна; также он доказал, что доказательство ее непротиворечивости получить *невозможно*.

Курт Гёдель (Kurt Gödel, 1906—1978)

Формальный метод потерпел поражение, а аксиоматическое построение математики было значительно дискредитировано.

1.3. Теория множеств и ее аксиоматизация

Дополнительную остроту кризису придавали *парадоксы теории множеств*. Дело в том, что в представлении Гильберта и современных ему математиков естественным фундаментом для математики могла быть только теория множеств, разработанная Кантором в конце XIX века. Но в начале XX века в теории множеств обнаружились неустранимые противоречия.

«Наивная теория множеств» имеет дело с *множествами* — любыми совокупностями объектов, которые называются «элементами множества». Утверждение «x является элементом X» записывается как $x \in X$. Его отрицание записывается как $x \notin X$.

Можно говорить о «множестве всех последовательностей элементов данного множества», «множестве всех букв алфавита», «множестве всех слов из букв данного алфавита» и проделывать над такими множествами естественные операции (пересечения, объединения и т. п.). *Подмножеством* множества X называется любое множество X', обладающее тем свойством, что все элементы X' являются элементами X. Тот факт, что X' является подмножеством множества X, записывается как $X' \subset X$.

«Пустое множество» (обозначается $\varnothing$) не имеет элементов вовсе.

Кантор не добивался абсолютной строгости в теории множеств. Первая попытка построить теорию множеств строго и аксиоматически принадлежала Готлобу Фреге, который предполагал, что получится логически вывести всю математику из самоочевидных постулатов теории множеств (этот подход к основаниям математики называется «логицизмом»). Построенную Фреге теорию называют «наивной теорией множеств». Она неверна (содержит противоречия).

Самое простое из противоречий наивной теории множеств было обнаружено Бертраном Расселом в 1901 году. Рассмотрим множество A всех множеств X, не являющихся собственным элементом. Будет ли A принадлежать A? Если A не принадлежит A, то A должно быть своим элементом, т. е. формальным следствием утверждения $A \notin A$ является $A \in A$.

Этот парадокс — форма хорошо известного «парадокса цирюльника». В одном селе живет цирюльник Х., который бреет всех жителей, кроме тех, которые бреют себя сами. Бреет ли цирюльник Х. сам себя?

Со времен Рассела получено множество парадоксов наивной теории множеств. Они все сводятся, грубо говоря, к тому, что строится «слишком большое» множество, которое и приводит к парадоксам.

Рассел и Уайтхед построили версию теории множеств, свободную от известных парадоксов, но она оказалась неудобна. Более удобная версия аксиоматической теории множеств была разработана Э. Цермело в 1908 году. В 1922 г. А. Френкель дополнил эту систему аксиом; современная версия аксиоматической теории множеств называется *система аксиом Цермело—Френкеля* (ZF). Отличие этой версии теории множеств от наивной было в том, что «излишне больших» множеств Цермело и Френкель не допускали. Их теория оперировала не «всеми» множествами, а только теми, существование которых можно доказать (вывести из аксиом). Такие множества конструируются из других множеств посредством набора четко определенных операций. И парадоксальные объекты, такие как «множество всех множеств», в системе аксиом Цермело—Френкеля просто *не существуют*.

Довольно долго (вплоть до Гёделя) математики надеялись, что теория множеств Цермело—Френкеля полна и непротиворечива. Сейчас ясно, что она неполна и, возможно, противоречива (во всяком случае, непротиворечивость этой системы аксиом доказать невозможно, и это факт). Тем не менее, в большинстве версий «оснований математики» математика базируется на теории множеств.

В обучении математике нам приходится поступать так же. Отчасти это связано с тем, что альтернативные подходы (конструктивная математика, теория категорий и другие) труднее и менее известны. А отчасти — с тем, что базовые понятия теории множеств (отображения, произведение множеств, подмножества, биекции, классы эквивалентности) необходимы математику в любом случае.

Бурбаки комментируют возможность противоречий в основаниях математики таким образом («Теория множеств»).

> За 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы Теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие, и можно с основанием надеяться, что оно и не появится никогда.
>
> Если бы дело и сложилось иначе, то, конечно, замеченное противоречие было бы внутренне присуще самим принципам, положенным в основание Теории множеств, а потому нужно было бы видоизменить эти принципы, стараясь по возможности не ставить под угрозу те части математики, которыми более других дорожат. И ясно, достичь этого тем более легко, что применение аксиоматического метода и формализованного языка позволит формулировать эти принципы более четко и отделять от них следствия более определенно. Впрочем, приблизительно это и произошло недавно, когда устранили «парадоксы» Теории множеств принятием формализованного языка... Подобную ревизию следует предпринять и в случае, когда этот язык окажется в свою очередь противоречивым.

1.4. Терминология и библиография

По-английски теория множеств называется set theory, Цермело—Френкель пишется Zermelo—Fraenkel. В английской версии Википедии основания математики изложены весьма подробно, особенно экзотические и альтернативные версии. Популярное изложение формального метода и его истории есть в «Теории множеств» Бурбаки. Полезный учебник по теории множеств — «Теория множеств» Куратовского и Мостовского. Биография Гильберта — книга Констанс Рид «Гильберт».

Философские аспекты теорем Гёделя подробно обсуждаются в книгах Р. Пенроуза «Новый ум короля» («The Emperor's New Mind») и «Тени разума» («Shadows of the Mind»).