И. А. Виноградова
С. Н. Олехник
В. А. Садовничий

1

Математический анализ в задачах и упражнениях

Дифференциальное и интегральное исчисление

И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий

Математический анализ в задачах и упражнениях

Том 1

Дифференциальное и интегральное исчисление

Электронное издание

Москва
Издательство Московского университета
Издательство МЦНМО
2017

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
В49

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
Математический анализ в задачах и упражнениях.
Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
412 с.
ISBN 978-5-4439-1120-5

Сборник задач соответствует программе курса математического анализа для студентов механико-математических и математических факультетов университетов, педагогических и технических вузов. Он может использоваться на семинарских занятиях по математическому анализу и для самостоятельной работы студентов. Пособие содержит широкий круг упражнений по основным темам курса, представлена большая подборка теоретических задач. Изложение каждой темы предваряется определениями и формулировками основных теорем, а также примерами решения задач от типовых упражнений до заданий повышенного уровня сложности.

В томе 1 рассматриваются дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, а также дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

В книге обобщён и методически переработан опыт преподавания математического анализа на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за последние десятилетия.

Для студентов и преподавателей университетов, педагогических и технических вузов, а также лиц, изучающих математический анализ самостоятельно.

Подготовлено на основе книги:
Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
Математический анализ в задачах и упражнениях: В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. — Новое изд. — М.: Изд-во Московского университета; МЦНМО, 2017. — 412 с. — ISBN 978-5-4439-1120-5

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
`http://www.mccme.ru`

ISBN 978-5-4439-1120-5

Предисловие

Отечественную школу преподавания математики всегда отличало сочетание чёткости рассуждений с глубиной содержания и в то же время с простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые предпочитаются формальным конструкциям. Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания, и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает. Для решения этих задач требуются учебники, отражающие современное состояние и мировоззренческие принципы данной области науки.

Издавая новые книги по математике, особенно для использования в учебном процессе, важно помнить слова Н. И. Лобачевского из предисловия к его «Алгебре»: «Новая книга начал математики не должна напрасно умножать число существующих, потому что их и без того уже много». Эти слова навеяны известным изречением Екклесиаста и несут в себе мудрость, данную от века.

Предлагаемое вниманию читателей учебное пособие «Задачи и упражнения по математическому анализу» является руководством для проведения семинарских занятий по основному курсу математического анализа для вузов, оно также удобно для самостоятельной работы студентов. В книге обобщён и методически переработан опыт преподавания предмета на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за последние десятилетия.

Пособие содержит широкий круг упражнений по основным темам курса, представлена большая подборка теоретических задач. Изложение каждой темы предваряется полной системой определений и формулировок основных теорем, а также примерами решения задач от типовых упражнений до заданий повышенного уровня сложности. Все упражнения снабжены ответами, к наиболее трудным упражнениям и теоретическим задачам приводятся указания.

Настоящее пособие выходит в трёх томах:

том 1 «Дифференциальное и интегральное исчисление»,

том 2 «Ряды и несобственные интегралы»,

том 3 «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы».

Новое издание представляет собой переработку и дополнение книг «Задачи и упражнения по математическому анализу» и «Математический анализ в задачах и упражнениях», выходивших с 1988 г. по 2003 г. Целью этой переработки явилось, во-первых, большее соответствие изменившимся за прошедшее время курсам математического анализа на механико-математическом факультете МГУ и, во-вторых, внесение поправок и уточнений, необходимость которых выяснилась в ходе работы с указанными пособиями.

При подготовке нового издания главное внимание уделено методической части и теоретическим задачам. Основной упор ставится на пояснение постановки определённого класса задач, прояснение связи с соответствующим разделом теоретического курса, описание общих методов решений. Теоретические задачи выделены в отдельные параграфы, но их разбор следует проводить параллельно с решением практических задач соответствующей главы в целях формирования целостной картины предмета изучения.

Переработка книги вызвала изменения как в разбивке на главы, так и в нумерации задач по сравнению с предыдущими изданиями. Более того, поскольку объём представленных задач велик, а диапазон уровня их сложности широк, проведена некоторая классификация. Символом $^\circ$ отмечены задачи «нулевого» уровня, обычно сводящиеся к непосредственному применению готовой формулы или решаемые практически в уме; зачастую такие задачи являются вводными при рассмотрении новой темы. Символом $\checkmark$ отмечены типичные для данной темы задачи, умение решать которые является необходимым минимумом. Звёздочкой отмечены задачи повышенной сложности, решение которых уже показывает достаточную свободу владения изучаемым материалом.

Вся большая и сложная работа по переработке пособия была проведена группой сотрудников кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, в которую вошли Ю. В. Андрианова, А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин, А. И. Камзолов, Д. В. Копьёв, О. Н. Косухин, А. К. Кравцева, Т. П. Лукашенко, С. М. Лыткин, Е. В. Мартынова, Ю. В. Межевова, А. В. Мелешкина, С. С. Пухов, Т. В. Родионов, Т. В. Салова, А. П. Солодов, А. А. Флёров, В. В. Фуфаев, Д. В. Фуфаев, А. И. Штерн. Авторы благодарят всех коллег, затративших силы и время на кропотливый и ответственный труд по подготовке настоящего издания.

Академик
Российской Академии наук
В. А. Садовничий

Глава 1

Построение эскизов графиков функций

§ 1.1. Элементарные преобразования графиков

Основными элементарными функциями считаются: *степенная функция* $y=x^a$, *показательная функция* $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, *логарифмическая функция* $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, *тригонометрические функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, *обратные тригонометрические функции* $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$. Иногда к основным тригонометрическим функциям причисляют также функции $y=\sec x$ (*секанс*), $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, и $y=\operatorname{cosec} x$ (*косеканс*), $\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$.

Элементарной называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

Рассмотрим построение эскизов графиков функций путём качественного анализа с наименьшим числом вычислений. Мы выделим некоторые классы элементарных функций и установим их главные свойства, опираясь на известные свойства основных элементарных функций и правила преобразования графика при определённых операциях с функцией. Техника дифференцирования практически применяться не будет; она либо излишняя (нет необходимости пользоваться производной для определения положения вершины параболы или максимумов синусоиды), либо слишком громоздка, например при анализе рациональных дробей. Но некоторые утверждения, которые строго доказываются с помощью дифференциального исчисления, будут сформулированы, и соответствующие свойства функций и их графиков будут использоваться. Более конкретно о том, что именно должен иллюстрировать в поведении функции эскиз её графика, будет сказано в соответствующих замечаниях и при разборе примеров.

Допустим, что построен график функции $y=f(x)$. В следующей таблице описано, как изменяется этот график при определённом преобразовании функции $f(x)$ или её аргумента.

Построение графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ $(a\neq 0)$ в общем случае сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отражение и т. д.) графика функции $f(x)$.

Представим y в виде $y=Cf\Big(a\Big(x+\dfrac{b}{a}\Big)\Big)+D$. Из такого представления y видно, что для построения графика этой функции достаточно построить график функции $y_1=Cf\Big(a\Big(x+\dfrac{b}{a}\Big)\Big)$.

Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2=f\Big(a\Big(x+\dfrac{b}{a}\Big)\Big)$. В свою очередь для построения графика функции y_2

Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком $y=f(x)$ на плоскости xOy
$f(x)+a$, $a\neq 0$	Сдвиг графика функции $y=f(x)$ вверх по оси Oy на a единиц, если $a>0$, и сдвиг вниз на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a<0$
$f(x-a)$, $a\neq 0$	Сдвиг вправо по оси Ox на a единиц, если $a>0$, сдвиг влево на $\lvert a\rvert$ единиц, если $a<0$
$kf(x)$, $k>0$, $k\neq 1$	Растяжение вдоль оси Oy относительно оси Ox в k раз, если $k>1$, сжатие вдоль оси Oy в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$f(kx)$, $k>0$, $k\neq 1$	Сжатие вдоль оси Ox относительно оси Oy в k раз, если $k>1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$-f(x)$	Симметричное отражение графика относительно оси Ox
$\lvert f(x)\rvert$	Замена части графика, лежащей в области $y<0$ (ниже оси Ox), на симметрично отражённую относительно оси Ox часть графика, расположенную в области $y>0$ (выше оси Ox); часть графика, лежащая в полуплоскости $y\geqslant 0$, остаётся без изменения
$f(-x)$	Симметричное отражение графика относительно оси Oy
$f(\lvert x\rvert)$	Замена части графика, лежащей в области $x<0$ (слева от оси Oy), на симметрично отражённую относительно оси Oy часть графика, расположенную в области $x>0$ (справа от оси Oy); часть графика, лежащая в полуплоскости $x\geqslant 0$, остаётся без изменения

достаточно построить график функции $y_3=f(ax)$. Итак, для построения графика функции $y=Cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)+D$ необходимо с графиком функции $f(x)$ произвести следующие преобразования.

1. Сжать или растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси Ox относительно оси Oy, если $a>0$; симметрично отразить относительно оси Oy и сжать или растянуть вдоль оси Ox относительно оси Oy, если $a<0$.

2. Сдвинуть по оси Ox полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right|$ единиц: влево, если $\frac{b}{a}>0$, и вправо, если $\frac{b}{a}<0$.

3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ вдоль оси Oy относительно оси Ox, если $C>0$; симметрично отразить относительно оси Ox и сжать или растянуть вдоль оси Oy относительно оси Ox, если $C<0$.

4. Если $D\neq 0$, то сдвинуть полученный график функции $Cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)$ на D единиц вверх, если $D>0$, и вниз на $\lvert D\rvert$, если $D<0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ можно представить символически в виде цепочки

$$f(x)\to f(ax)\to f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)\equiv f(ax+b)\to Cf(ax+b)\to Cf(ax+b)+D.$$

На практике удобнее построение графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ начинать с написания цепочки

$$Cf(ax+b)+D\leftarrow Cf(ax+b)\leftarrow f(ax+b)\equiv f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)\leftarrow f(ax)\leftarrow f(x).$$

Отсюда видно, график какой функции в этой цепочке является базовым для построения графика последующей функции.

График квадратичной функции: $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

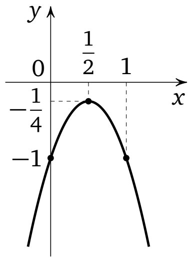
После тождественного преобразования: $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$ видно, что график квадратичной функции представляет собой параболу — график функции $y_1=ax^2$, — сдвинутую по оси Ox на $\left|\dfrac{b}{2a}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака $\dfrac{b}{2a}$ и по оси Oy на $\left|c-\dfrac{b^2}{4a}\right|$ вверх или вниз в зависимости от знака этой разности. Характерной для параболы точкой является её *вершина* — точка с координатами $\left(-\dfrac{b}{2a}, c-\dfrac{b^2}{4a}\right)$. Парабола симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через вершину, — прямой $x=-\dfrac{b}{2a}$, ветви параболы направлены вверх или вниз в зависимости от знака a (вверх при $a>0$, вниз при $a<0$). Для окончательного выяснения расположения данной параболы на координатной плоскости находим ещё одну точку этой параболы, проще всего точку пересечения с осью Oy, т. е. точку $(0, c)$, если она не совпадает с вершиной ($b\neq 0$).

Пример 1.1. Построим график функции $y=3x-3x^2-1$.

Решение. Равенство

$$y=-3(x^2-x)-1=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-1=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

показывает, что вершина искомой параболы находится в точке $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, а ось Oy парабола пересекает в точке $(0, -1)$. Ветви параболы направлены вниз, как и должно быть, если коэффициент при x^2 отрицателен. □



$y=3x-3x^2-1$

График дробно-линейной функции: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$, $ad\neq bc$.

Если $ad=bc$, то числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель $\left(x+\dfrac{d}{c}\right)$, поэтому функция y всюду, кроме $x=-\dfrac{d}{c}$, есть постоянная $\dfrac{a}{c}$ и её график имеет вид, изображённый на рис. 1. Обратите внимание на отличие этого графика от графика функции $y=\dfrac{a}{c}$!

Если $ad\neq bc$ (т.е. рассматриваемая дробь несократима), то после тождественного преобразования

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{k}{x+\dfrac{d}{c}}, \quad k\neq 0,$$

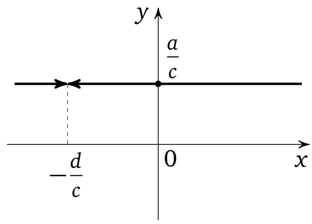
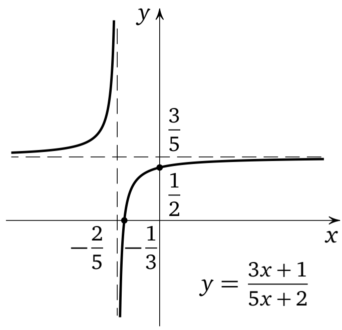


Рис. 1

видно, что график дробно-линейной функции представляет собой кривую обратной пропорциональности $y=\dfrac{k}{x}$ (гиперболу), сдвинутую по оси Ox на $\left|\dfrac{d}{c}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака $\dfrac{d}{c}$ и по оси Oy на $\left|\dfrac{a}{c}\right|$ вверх или вниз в зависимости от знака $\dfrac{a}{c}$. Таким образом, для построения графика дробно-линейной функции достаточно знать её асимптоты и расположение относительно них одной из ветвей гиперболы, так как вторая ветвь симметрична первой относительно точки пересечения асимптот. Асимптотами являются прямые $x=-\frac{d}{c}$ и $y=\frac{a}{c}$, а положение одной определяется точкой пересечения гиперболы с осью Ox или Oy.



Пример 1.2. Построим график функции $y=\frac{3x+1}{5x+2}$.

Решение. Асимптоты гиперболы — прямые $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{3}{5}$; точка её пересечения с осью Oy есть $(0, y(0))=\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, одна из ветвей рассматриваемой гиперболы лежит в четвёртой четверти относительно асимптот, вторая, симметричная с первой, — во второй. □

Пример 1.3. Построим график функции $y=\log_3(1-2x)$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\log_3(1-2x)\equiv\log_3\left(-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\xleftarrow[\text{на } 1/2 \text{ вправо}]{\text{сдвиг}}\log_3(-2x)\leftarrow\log_3(2x)\leftarrow\log_3 x.$$

Итак, построение графика функции $y=\log_3(1-2x)$ начинаем с построения графика $y_1=\log_3 x$, затем сжатия этого графика вдоль оси Ox относительно оси Oy в два раза, затем симметричного отражения относительно оси Oy и, наконец, сдвига полученного графика на $1/2$ вправо вдоль оси Ox (см. рис. 2). □

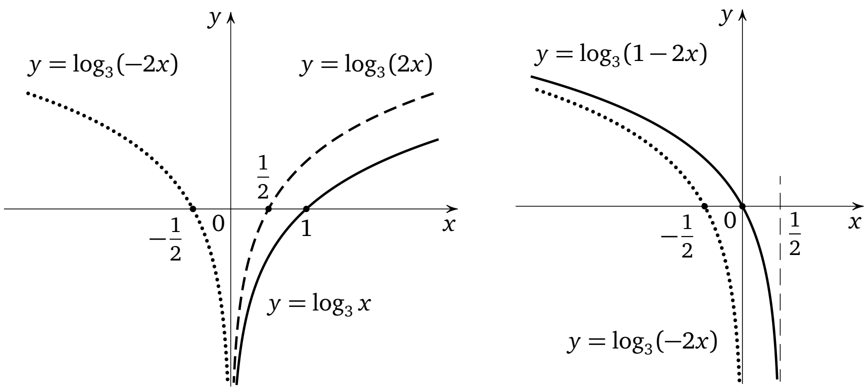


Рис. 2

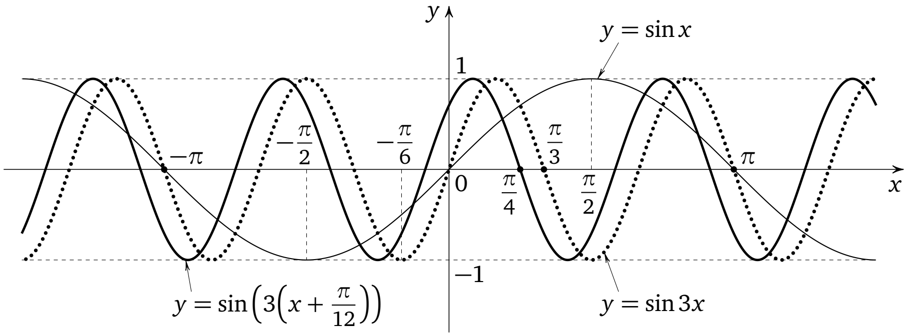
Подчеркнём ещё раз: величина сдвига вдоль оси Ox определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax. Поэтому для нахождения этой константы выражение $ax+b$ сначала преобразуется к виду $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$.

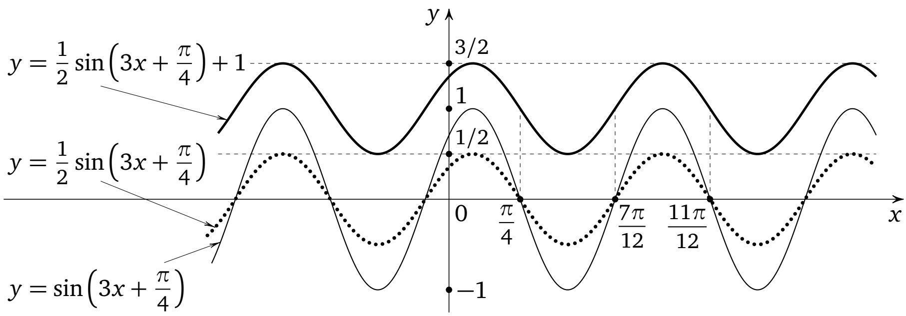
В связи с этим рекомендуется операцию сдвига вдоль оси Ox проводить после операций сжатия или растяжения вдоль оси Ox относительно оси Oy.

Пример 1.4. Построим график функции $y = \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

Решение. Напишем цепочку преобразований: $\frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leftarrow$

$$\leftarrow \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \equiv \sin\left(3\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) \leftarrow \sin 3x \leftarrow \sin x.$$



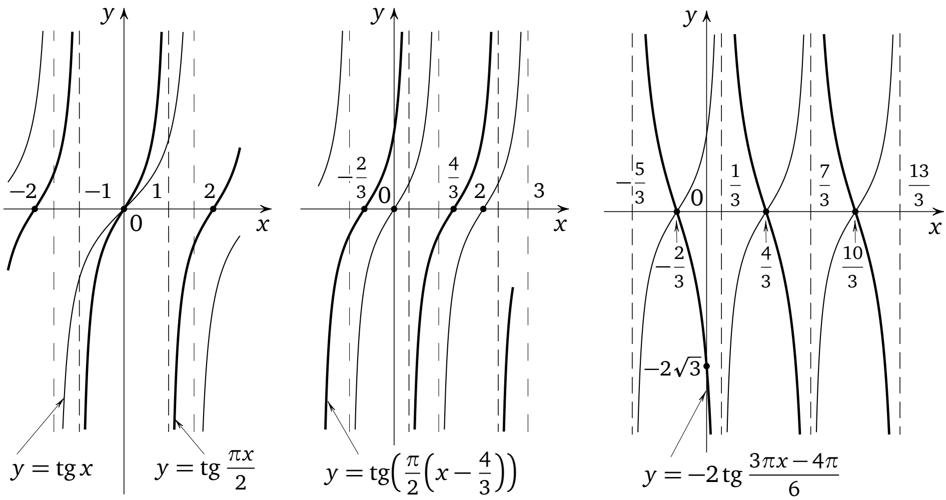


Этапы построения графика см. выше. □

Пример 1.5. Построим график функции $y = -2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований

$$-2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6} \leftarrow \mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6} \equiv \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)\right) \leftarrow \mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2} \leftarrow \mathrm{tg}\,x.$$



Этапы построения графика см. выше. □

Обратите внимание, что графики функций $y=\sin x$ и $y=\operatorname{tg} x$ касаются прямой $y=x$ в нуле, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

(см. с. 117), причём $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ при $0<x<\pi/2$ (докажите!).

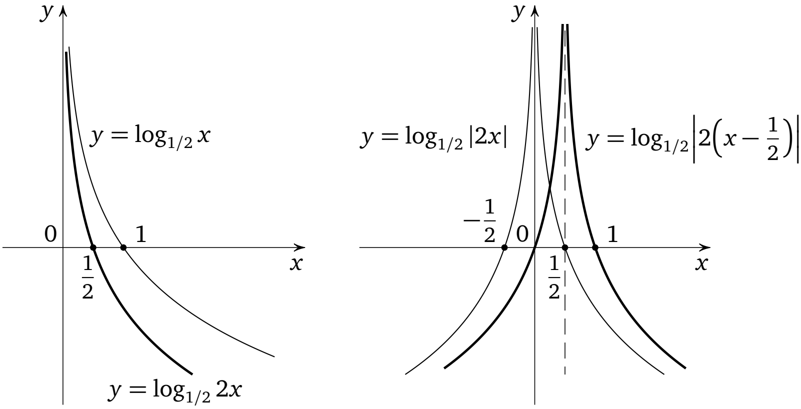
Пример 1.6. Построим график функции $y=\log_{1/2}\big|1-2||x|-1|\big|$.

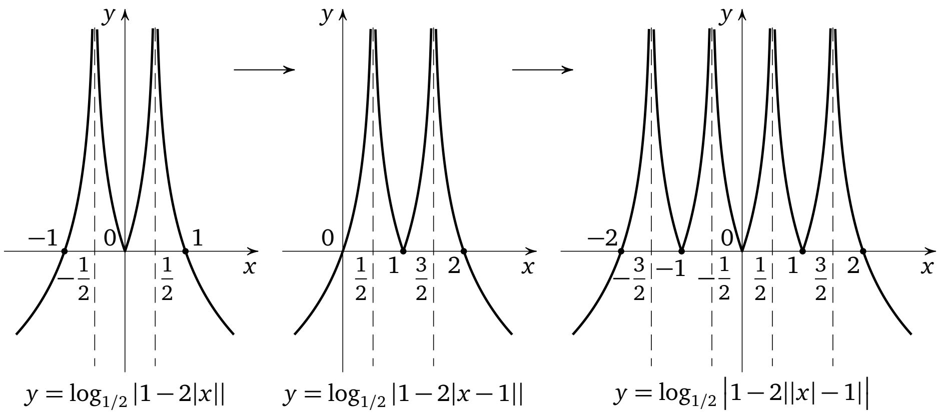
Решение. Напишем цепочку преобразований

$$\log_{1/2}\big|1-2||x|-1|\big| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2|x-1|| \xleftarrow[\text{на 1 вправо}]{\text{сдвиг}}$$

$$\leftarrow \log_{1/2}|1-2|x|| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2x| \equiv \log_{1/2}|2x-1| \equiv$$

$$\equiv \log_{1/2}\left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow[\text{на 1/2 вправо}]{\text{сдвиг}} \log_{1/2}|2x| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}2x \xleftarrow[\text{в 2 раза}]{\text{сжатие}} \log_{1/2}x.$$



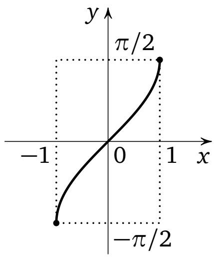


Этапы построения графика см. выше. □

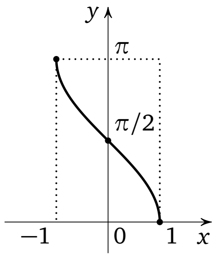
Аналогичным методом строятся графики функций с применением и других преобразований.

§ 1.2. Обратные тригонометрические функции и их графики

Функция $y = \sin x$, рассматриваемая на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, не является монотонной. Чтобы говорить об обратной функции, выделим участок монотонности функции $y = \sin x$, на котором она принимает все значения из $[-1; 1]$, например отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функцию, обратную к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, обозначим через $y = \arcsin x$, т. е. запись $y = \arcsin x$ означает, что $x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если рассмотрим функцию $y = \sin z$ на другом участке, например $\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то существует обратная функция, которая выражается через $y = \arcsin z$ следующим образом: $y = \pi - \arcsin z$ (почему?).



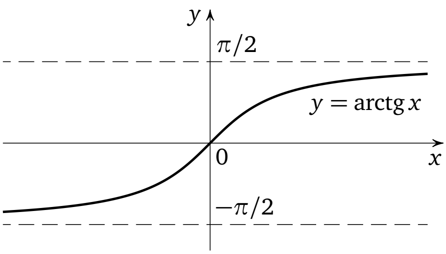
$y = \arcsin x$

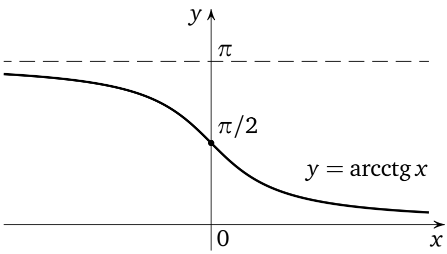


$y = \arccos x$

Аналогично задают обратную функцию $y = \arccos x$: запись $y = \arccos x$ означает, что $x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Для функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ определяется обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$, т. е. запись $y = \operatorname{arctg} x$ означает, что $x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Для функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ определяется обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$, т. е. запись $y = \operatorname{arcctg} x$ означает, что $x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

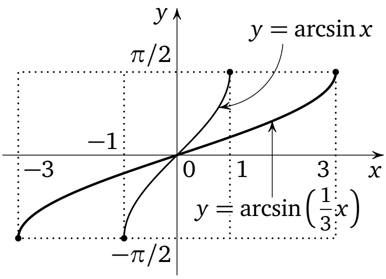


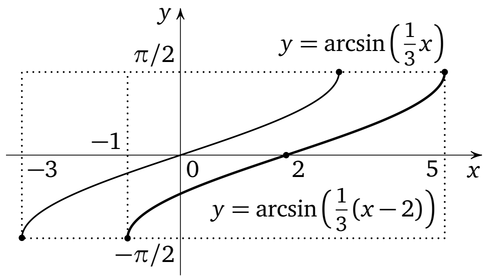


Пример 1.7. Построим график функции $y = \arcsin \frac{x-2}{3}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arcsin \frac{x-2}{3} \equiv \arcsin\left(\frac{1}{3}(x-2)\right) \xleftarrow[\text{на 2 вправо}]{\text{сдвиг}} \arcsin\left(\frac{1}{3}x\right) \leftarrow \arcsin x.$$





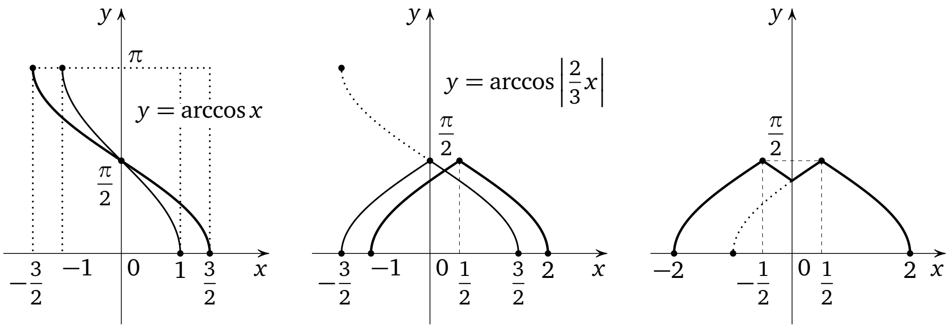
Этапы построения графика см. выше. □

Пример 1.8. Построим график функции $y = \arccos \dfrac{|1-2|x||}{3}$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\arccos \frac{|1-2|x||}{3} \xleftarrow{x>0} \arccos \frac{|1-2x|}{3} \equiv \arccos\left|\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow[\text{на } 1/2 \text{ вправо}]{\text{сдвиг}}$$

$$\leftarrow \arccos\left|\frac{2}{3}x\right| \xleftarrow{x>0} \arccos\left(\frac{2}{3}x\right) \leftarrow \arccos x.$$



$y = \arccos\left(\dfrac{2}{3}x\right)$ $\qquad$ $y = \arccos\left|\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right|$ $\qquad$ $y = \arccos \dfrac{|1-2|x||}{3}$

Этапы построения графика см. выше. □

Справедливы следующие формулы:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad |x| \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad \sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi; \quad \cos(\arccos x) = x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad |x| < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad 0 < x < \pi;$$

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \ y > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \ y > 0;$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \ y > 0.$$

Докажем некоторые из этих формул.

1. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, $|x|\leqslant 1$.

Пусть $\arccos(-x)=\alpha$, тогда $\cos\alpha=-x$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Из соотношения $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ получаем $0\leqslant\pi-\alpha\leqslant\pi$, а из равенства $\cos\alpha=-x$ следует, что $\cos(\pi-\alpha)=x$. Поэтому $\pi-\alpha=\arccos x$, откуда $\alpha=\pi-\arccos x$, т. е. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

2. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $|x|\leqslant 1$.

Пусть $\arcsin x=\alpha$, $\arccos x=\beta$, тогда $x=\sin\alpha=\cos\beta$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$. Имеем $\sin\alpha=\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Поэтому $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, откуда получаем, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, т. е. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

3. $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Пусть $0\leqslant x\leqslant 1$. Обозначим $\arcsin x=\alpha$, тогда $x=\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Значит, $\cos\alpha=+\sqrt{1-x^2}$, откуда $\alpha=\arccos\sqrt{1-x^2}$, т. е. $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$, что и требовалось доказать.

4. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}$, $x>0$, $y>0$.

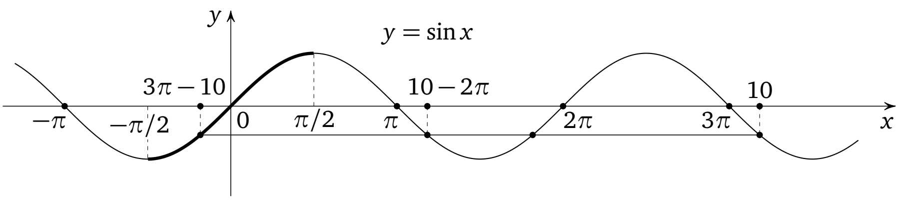
Обозначим $\operatorname{arctg} x=\alpha$, $\operatorname{arctg} y=\beta$, $x>0$, $y>0$. Тогда $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha+\beta<\pi$. Поэтому

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-xy}{x+y},\quad \alpha+\beta=\operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y},\quad \text{т. е.}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}.$$

Пример 1.9. Вычислим $\arcsin(\sin 10)$.

Решение. Имеем $\arcsin(\sin x)=x$ при $|x|\leqslant\pi/2$.



Пользуясь свойствами функций $y=\sin x$ и $y=\arcsin x$, а также периодичностью функции $y=\sin x$, имеем

$$\arcsin(\sin 10)=\arcsin(\sin(10-2\pi))=\arcsin(\sin(\pi-(10-2\pi)))=3\pi-10,$$

поскольку $|3\pi-10|<\frac{\pi}{2}$. □

Пример 1.10. Построим график функции $y=\arccos(\sin x^2)$.

Решение. Областью определения функции является вся ось Ox. Из тождества $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ при $|x|\leqslant 1$ имеем $\arccos(\sin x^2)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin x^2)$ (так как $|\sin x^2|\leqslant 1$ для любого x). В силу чётности функции $\arcsin(\sin x^2)$ до-

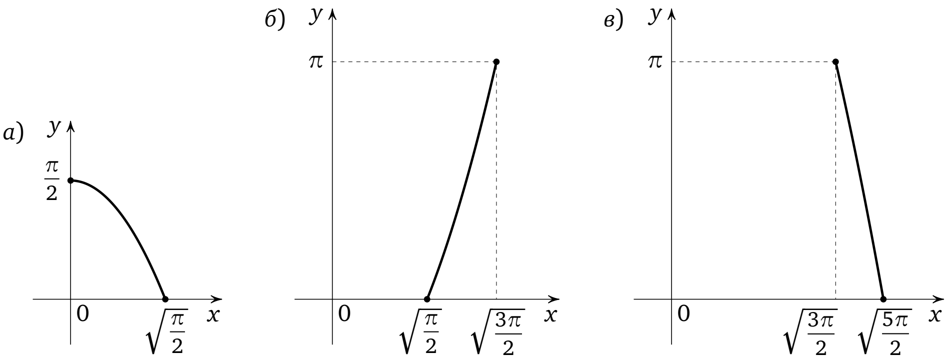
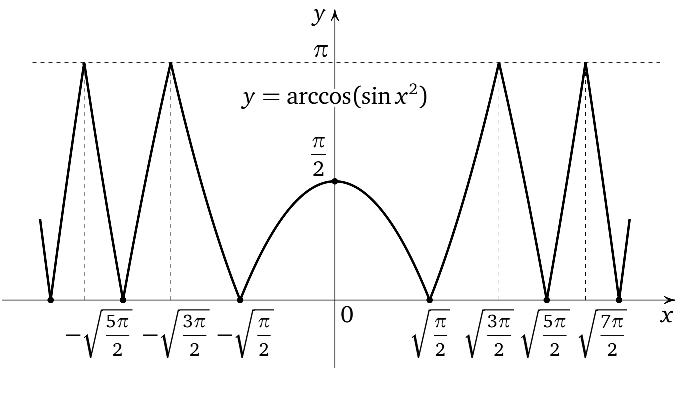


Рис. 3

статочно построить её график в полуплоскости $x \geqslant 0$. Поскольку $\arcsin(\sin x) = x$, если $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x^2) = x^2$ при $x^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Поэтому $\arccos(\sin x^2) = \frac{\pi}{2} - x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (см. рис. 3 *а*). Если $x \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$, то $x^2 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, а поскольку $x^2 - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin(x^2 - \pi) = -\sin x^2$, то

$$\arcsin(\sin x^2) = \arcsin(-\sin(x^2-\pi)) = -\arcsin(\sin(x^2-\pi)) = -(x^2-\pi) = \pi - x^2.$$

Поэтому при $x \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)$ график исходной функции совпадает с графиком функции $y = \frac{\pi}{2} - (\pi - x^2)$, т. е. $y = x^2 - \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 3 *б*). При $x \in \left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}; \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right)$ имеем, что $x^2 \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$, $x^2 - 2\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и так как $\sin x^2 = \sin(x^2 - 2\pi)$, то $\arcsin(\sin x^2) = x^2 - 2\pi$. Поэтому при $x \in \left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}; \sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right)$ график исходной функции совпадает с графиком функции $\frac{\pi}{2} - (x^2 - 2\pi) = \frac{5\pi}{2} - x^2$ (см. рис. 3 *в*).



Аналогично при $x \in \left(\sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}}; \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\right)$, $k \geqslant 3$, график исходной функции совпадает с графиком функции $y = \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1}(x^2 - \pi k)$. □

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru