Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2016

математика

Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51-8
ББК 22.10
З15

Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года
Составители К. П. Кохась, С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, Ф. В. Петров, А. А. Солынин, А. И. Храбров
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
152 с.
ISBN 978-5-4439-3138-8

Книга предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. Читатель найдет в ней задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года, а также открытой олимпиады ФМЛ № 239, которая, не будучи туром Санкт-Петербургской олимпиады, по характеру задач, составу участников и месту проведения является прекрасным дополнением к ней.

Все задачи приведены с подробными решениями, условия и решения геометрических задач сопровождаются рисунками.

В качестве дополнительного материала приводится отчет об олимпиаде «Туймаада–2015», большая подборка задач об угадывании цвета своей шляпы, поучительнейшая сказка, в которой Бусенька, спекулируя понятием «площадь», помогает Ушасе обыграть самогó Уккха, а также не менее поучительный комментарий к этой сказке.

Подготовлено на основе книги: Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2016 года / Сост. К. П. Кохась, Н. Ю. Власова, А. И. Храбров и др. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1138-0.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3138-8

В 2015/16 учебном году в Санкт-Петербурге проводилась 82-я городская олимпиада школьников по математике. Первый тур проходил 12 декабря 2015 г., в нем приняли участие около 10 тысяч школьников Санкт-Петербурга. Победители первого тура, а также победители городской олимпиады 2015 года были приглашены на второй тур. Для 6–8 классов второй тур олимпиады проходил 7 февраля 2016 г. на математическом факультете Российского государственного педагогического университета, для 9–11 классов — 28 февраля 2016 г. на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета.

Продолжительность первого тура — 3 часа, второго тура (во всех классах, кроме 6-го) — 3 часа плюс еще час для участников, которые решили не менее трех задач из первых четырех задач варианта. В 6 классе — 2,5 и 3,5 часа соответственно.

В составлении вариантов олимпиады участвовали:

6 класс — Н. Ю. Власова, К. П. Кохась;

7 класс — А. А. Солынин, К. А. Сухов;

8 класс — Д. В. Карпов, А. В. Пастор;

9 класс — С. Л. Берлов, Д. А. Ростовский, А. И. Храбров;

10 класс — Ф. В. Петров, А. В. Смирнов;

11 класс — А. С. Голованов, А. С. Чухнов.

Много сил в организацию олимпиады вложили Л. А. Жигулёв, М. Н. Воронина. Проведение олимпиады было бы невозможно без помощи многочисленных энтузиастов — студентов, учителей и преподавателей вузов. Составители благодарны Ю. Ахметшину за тщательное прочтение рукописи. Задачи олимпиады и текущую информацию можно найти на нашей интернет-страничке www.pdmi.ras.ru/~olymp

В городском туре олимпиады по приглашению жюри принимали участие гости — школьники из Витебска, Вологды, Каунаса, Кирова, Минска, Москвы, Рыбинска, Ярославля и других городов.

Победители олимпиады 2016 года

6 класс

Диплом первой степени

Аверков Даниил	239	Поляничко Григорий	239
Бахарев Иван (5)	239	Пяткова Анна	366
Березовой Михаил	366	Солнышкин Григорий	610
Леонтьев Лев	239	Туревский Максим (5)	239

Диплом второй степени

Ананьев Дмитрий (4)	144	Лавров Всеволод	239
Бойцова Екатерина (4)	366	Мисюра Илья	г. Лондон
Гринченко Даниил	239	Михайлов Роман	366
Коротченко Таисия (5)	239	Ожегова Марина	г. Киров

Диплом третьей степени

Абрамова Амалия (5)	239	Королёва Таисия	366
Аккая Тимур (4)	207	Куликов Арсений (5)	239
Белаш Александр	30	Овсянников Марк	366
Бушмаков Максим	г. Киров	Онищенко Сергей	30
Варнин Арсений	239	Петрова Марьяна	232
Гайдук Олеся	2-я гимн.	Сироткина Вероника	150
Иванов Кирилл	30	Сорвин Лев	610
Ильин Никита (5)	239	Шостак Татьяна	239
Коноченков Иван	239	Шрамко Тимур	56

7 класс

Диплом первой степени (7 задач)

Лялинов Иван	239
Огнёв Александр	239

Диплом первой степени (6 задач)

Савельев Артём	г. Киров

Диплом второй степени

Броварник Илья	239	Налимов Леонид	4
Головастенко Александр	148	Оксаниченко Фёдор	«Горчаков»
Караваев Пётр	239	Слепанчук Артем	277
Ким Владимир	239	Туревский Максим (5)	239

Диплом третьей степени

Аверков Даниил (6)	239	Плаксин Михаил	328
Березовой Михаил (6)	366	Полозова Ольга	г. Киров
Вагин Дмитрий	433	Поляничко Григорий (6)	239
Васильев Иван	239	Сысоев Сергей	597
Волков Иван	419	Федотов Даниил	533
Жаворонков Дмитрий	239	Чайка Максим	101
Колесников Артём	239	Шувалов Арвинд	239
Мастинен Никита	239		

8 класс

Диплом первой степени

Мовсин Марат	533
Петров Владимир	239

Диплом второй степени

Иванов Всеволод	533
Можаев Андрей	239
Титов Тимофей	239

Диплом третьей степени (5 задач)

Казаков Сергей	533	Никитин Сергей	239
Кравченко Егор	239	Сукнёв Дмитрий	239

Диплом третьей степени (4 задачи)

Колпащков Александр	г. Киров	Мартынов Павел	533
Коротченко Денис	239	Морозов Александр	239
Кутявин Денис	г. Киров	Павлов Илья	533
Макоян Артём	г. Самара	Шушпанов Стефан	г. Киров
Малиновский Владимир	ФТШ		

9 класс

Диплом первой степени (7 задач)

Крымский Станислав	ФТШ

Диплом первой степени (6 задач)

Ретинский Вадим	г. Ливны

Диплом второй степени

Беляков Артем	533
Герасименко Артур	г. Москва
Лучинин Сергей	г. Киров
Рябов Егор	г. Москва
Толокно Изабелла	239

Диплом третьей степени

Ашихмин Анатолий	г. Киров
Бородулина Дарья	239
Горбачёв Егор	239
Конева Елизавета	239
Кравченко Егор (8)	239
Leviniskaite Neringa	г. Каунас
Лялинов Иван (7)	239
Можаев Андрей (8)	239
Петров Владимир (8)	239
Фёдоров Даниил	533
Яковлев Захар	ФТШ

10 класс

Диплом первой степени

Тыщук Кирилл	239

Диплом второй степени (5 задач)

Долгих Сергей	г. Рыбинск
Жуков Матвей	239

Диплом второй степени (4 задачи)

Мигрин Виктор	239
Токмачёв Александр	г. Ярославль

Диплом третьей степени

Вирачев Арсений	239	Пучинин Сергей	г. Ярославль
Епифанов Владислав	533	Ракицкий Михаил	ФТШ
Захарков Александр	239	Фафурин Олег	239
Лисоветин Никита	239	Федорец Никита	г. Москва
Мариев Артём	г. Киров	Чарковский Георгий	239

11 класс

Диплом первой степени (7 задач)

Салимов Руслан	г. Москва

Диплом первой степени (6 задач)

Губкин Павел	239
Каламбет Анатолий	г. Москва
Соколов Игнат	г. Курган
Юргин Григорий	г. Москва

Диплом первой степени (5 задач)

Лучкин Вадим	г. Москва
Новиков Святослав	239

Диплом второй степени

Алексеев Ярослав	30	Мосеева Татьяна	г. Ярославль
Кароль Николай	239	Петров Семён	г. Ярославль
Коненков Степан	239	Ульянов Петр	г. Витебск
Лупуляк Ольга	239	Шашков Тимофей	239

Диплом третьей степени

Байтенов Егор	г. Рыбинск	Семёнов Никита	г. Минск
Богомолов Михаил	ФТШ	Серенков Борис	г. Минск
Гурьев Василий	30	Сонина Александра	г. Ярославль
Зайнуллин Егор	239	Ходачук Денис	30
Кукель Евгений	г. Минск	Шувалова Мира	239
Свирин Евгений	239		

Статистические данные олимпиады 2016 года

Критерий пропуска на второй тур олимпиады

Класс	6	7	8	9	10	11
Количество задач	2+	2+	2	2+	2	3

Второй тур

В левой таблице по каждой задаче приведено количество решивших ее участников; также указаны общее количество приглашенных на олимпиаду и количество прошедших в выводную аудиторию*. В правой таблице указано количество участников, решивших данное количество задач.

Класс	Номер задачи 1	2	3	4	5	6	7	Всего	Вывод
6	96	84	34	69	25	12	–	120	65
7	79	90	41	14	18	12	3	101	44
8	55	46	28	18	10	15	3	89	29
9	64	67	35	19	5	2	7	110	35
10	19	68	35	3	10	3	0	126	36**
11	52	52	22	12	9	15	2	115	45**

Класс	Количество задач 1	2	3	4	5	6	7
6	17	25	31	18	8	8	–
7	13	35	18	15	8	1	2
8	17	18	11	9	3	4	2
9	16	25	17	11	5	1	1
10	42	21	10	2	2	1	0
11	22	19	11	8	2	4	1

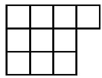
* В начале олимпиады все участники получают карточку с условиями четырех задач. Во время олимпиады участников, решивших три задачи, переводят в отдельную (выводную) аудиторию, где они получают условия еще трех (в шестом классе — двух) задач.

** Проход в вывод по двум задачам.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Первый тур

6 класс



1. Расставьте в клетках указанной фигурки числа от 5 до 14 так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были разными (доминошка — это прямоугольник, состоящий из двух клеток, соседних по стороне). *(А. Чухнов)*

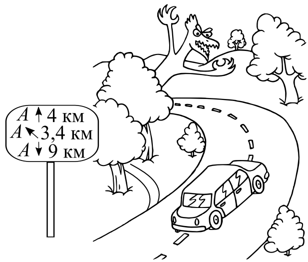
2. Приходя в школу, Вася здоровается со всеми одноклассниками (кроме, разумеется, самого себя). К началу уроков Вася не успел поздороваться ровно с одной четвертью от общего числа учеников своего класса, в том числе с Колей. А Коля к этому времени поздоровался ровно с одной седьмой из тех одноклассников, с которыми поздоровался Вася. Какое наименьшее число учеников может быть в классе? Не забудьте обосновать ответ. *(С. Берлов)*

3. Надя задумала число n, делящееся на 500, и выписала на доску все его натуральные делители, кроме самого числа n. Докажите, что сумма нечетных чисел на доске меньше, чем сумма четных. *(А. Голованов)*

4. Дети в классе угощали друг друга конфетами. Каждый мальчик дал по конфете всем, кто выше его, а каждая девочка — всем, кто ниже ее (все дети разного роста). Оказалось, что Саша, Женя и Валя получили поровну конфет, а все остальные — меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих — девочка. *(О. Иванова)*

7 класс

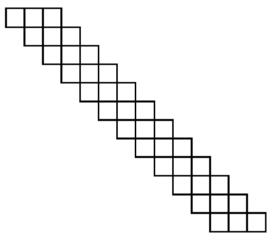
5. На круговом шоссе длиной 13 км находятся пять различных населенных пунктов A, B, C, D, E. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от A до B равно 3 км, от B до C — 6 км, от C до D — 4 км, от D до E — 5 км, а от E до A — 6 км? (*В. Франк*)



6. В клетках квадрата 7×7 стоит 100 крестиков. Нашлось три горизонтали, в клетках которых в сумме содержится не менее 70 крестиков, и три аналогичные вертикали. Докажите, что либо в какой-то клетке нет ни одного крестика, либо найдется клетка, в которой стоит не меньше семи крестиков (либо и то и другое). (*А. Солынин*)

7. На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычеркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятерку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятерок могли получить ученики Марии Ивановны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятерок. (*А. Голованов*)

8. Дана «лесенка» из 12 строчек (см. рисунок). Костя расставляет в ее клетках числа от 1 до 36 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз). Сколькими способами он сможет это сделать? (*К. Кохась*)

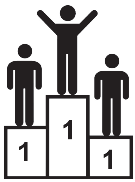


8 класс

9. Вдоль кругового шоссе построено 30 домов высотой 1, 2, 3, …, 30 этажей (ровно по одному дому каждой высоты). Назовем дом *интересным*, если он выше одного из соседних с ним домов, но ниже другого. Оказалось, что среди этих домов ровно 10 интересных. Докажите, что суммарная высота интересных домов не может быть равна 64 этажам. (*В. Самойлов*)

10. См. задачу 7.

11. Районную олимпиаду писало 9000 школьников. Каждый из них получил *оценку* от 0 до 15 баллов. При занесении в компьютер оценки 12, 13 или 14 баллов были заменены на 15 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов (остальные оценки не менялись). В результате средний балл всех участников уменьшился на 0,1 балла. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b, что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличались не менее чем на 150. (*А. Кузнецов*)



12. Точки P и Q лежат в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором две наибольшие стороны противоположны и равны. Для каждой из этих двух точек посчитали сумму расстояний до вершин четырехугольника. Докажите, что эти суммы отличаются не больше чем в 2 раза. (*С. Берлов*)

13. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждая девочка знакома хотя бы с одним мальчиком, а каждый мальчик — хотя бы с одной девочкой. Однажды каждая девочка сказала: *Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей — двоечники*, а каждый мальчик сказал: *Среди знакомых мне девочек не менее половины — троечницы.* Известно, что все дети сказали правду, но при этом в школе всего 10 мальчиков — двоечники. Какое наименьшее число девочек может быть троечницами? (*А. Солынин*)

9 класс

14. Можно ли так разбить целые числа от 0 до 301 на пары, что если числа в парах сложить и эти суммы перемножить, то полученное произведение окажется 15-й степенью натурального числа? (*А. Храбров*)

15. В городе Глупове 6000 школьников писали Единый Глуповский Экзамен, за который можно было получить от 0 до 8 баллов. После проверки всем участникам, набравшим 1, 2 или 3 балла, результат был исправлен на 0 баллов, а всем, у кого было 5, 6 или 7 баллов, поставили 8 баллов (остальные результаты не исправлялись). В результате этих махинаций средний балл всех участников вырос на 0,1 балла. Докажите, что существуют такие целые числа a и b ($0 \leqslant a, b \leqslant 8$), что количество школьников, у которых до махинаций был результат a баллов, и количество школьников, имевших до махинаций результат b баллов, отличаются не меньше чем на 100. (*А. Кузнецов*)

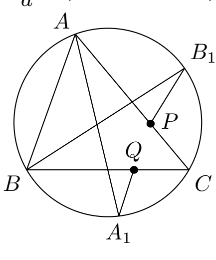
16. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Среди любых 200 цифр подряд нулей и единиц поровну, а среди любых 202 цифр подряд — не поровну. Какое наибольшее количество цифр может располагаться в этом ряду? (*С. Берлов*)

17. Квадратный трехчлен $2ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом таков, что каждая из прямых

$$y = ax + b, \qquad y = bx + c, \qquad y = ax + c,$$
$$y = bx + a, \qquad y = cx + b, \qquad y = cx + a$$

пересекает его график не более чем в одной точке. Какое максимальное значение может принимать величина $\frac{c}{a}$? (*А. Солынин*)

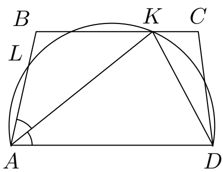
18. В треугольнике ABC продолжения медиан из вершин A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. На стороне AC выбрана точка P, а на стороне BC — точка Q так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$. (*А. Кузнецов*)



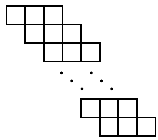
10 класс

19. По кругу выписано 29 ненулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 29 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть точным квадратом? (*А. Кузнецов*)

20. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K. Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$. (*С. Берлов*)



21. Дана «лесенка» 100×3 (в каждой строчке 3 клетки, каждая следующая строчка сдвинута по сравнению с предыдущей на одну клетку вправо). Сколькими способами можно расставить в ней числа от 1 до 300 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз)? (*К. Кохась*)



22. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами, что каждое из уравнений

$$f(x) = f(6x-1), \qquad f(t) = f(3-15t)$$

имеет (хотя бы одно) целочисленное решение? (*Ф. Петров*)

23. Положительные числа $a \leqslant b \leqslant c$ и натуральное число n удовлетворяют условию $a^n + b^n = c^n$. Докажите неравенство $c - b \leqslant (\sqrt[n]{2} - 1)a$. (*А. Храбров*)

11 класс

24. Уравнение $ax + \frac{c}{x} = b$, в котором коэффициенты a, b и c отличны от нуля, имеет решение. Докажите, что тогда имеет решение и одно из уравнений $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$. (*А. Голованов*)

25. По кругу расставили числа от 1 до 40. Число называется *хорошим*, если оно делится на число, стоящее справа от него. Какое наибольшее количество чисел могут оказаться хорошими? (*С. Берлов*)

26. См. задачу 20.

27. Функция f при всех x, $y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству
$$f(x^2+2y) \geqslant f(x^2+3y).$$
Известно, что $f(100)=100$. Найдите $f(200)$. (*А. Голованов*)

28. На доске написаны два числа: 10^6 и 10^9. Разрешается дописать на доску среднее арифметическое двух уже написанных чисел, если это число целое и еще не было написано ранее. Сколько чисел можно таким образом написать? (*А. Солынин*)

Второй тур

6 класс

29. На экране кривого калькулятора написано число 20. Время от времени калькулятор умножает число на экране на 2 и тут же вычитает из результата какое-нибудь число от 1 до 10. Может ли на экране получиться число 2016? (*К. Сухов*)

30. Числа 1, 2, 3, …, 200 расставлены вдоль окружности в некотором порядке. Для каждого числа n среди 99 чисел, стоящих после него по часовой стрелке, и среди 99 чисел, стоящих до него, имеется поровну чисел, меньших n. Найдите, какое число стоит напротив числа 111. (*А. Голованов*)

31. Натуральное число можно представить как сумму 18 его делителей (необязательно различных) и как сумму 19 его делителей (необязательно различных). Докажите, что это число можно представить и как сумму 20 его делителей (необязательно различных). (*В. Франк*)

32. На полке в камере хранения стоят 10 чемоданов, занумерованных в некотором порядке числами от 1 до 10. Чемоданы имеют разную ширину и стоят необязательно вплотную друг

Содержание

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru
Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order
Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru