Н. Я. ВИЛЕНКИН

Рассказы о множествах

Н. Я. Виленкин

Рассказы о множествах

Издание пятое, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 510.2
ББК 22.12
В44

Виленкин Н. Я.

В44 Рассказы о множествах. — 5-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013. — 152 с.

ISBN 978-5-4439-0066-7

В 70-х годах XIX века немецкий математик Г. Кантор создал новую область математики — теорию бесконечных множеств. Через несколько десятилетий почти вся математика была перестроена на теоретико-множественной основе. Понятия теории множеств отражают наиболее общие свойства математических объектов.

Обычно теорию множеств излагают в учебниках для университетов. В настоящей книге в популярной форме описываются основные понятия и результаты теории множеств.

Книга предназначена для широкого круга читателей, интересующихся математикой и желающих узнать, что такое теория множеств.

Предыдущее издание книги вышло в 2007 г.

ББК 22.12

Виленкин Наум Яковлевич

РАССКАЗЫ О МНОЖЕСТВАХ

Дизайн обложки Соповой У. В.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Подписано к печати 19.12.2012 г. Формат $60 \times 88/16$. Печать офсетная.
Объем 9,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ №   .

Отпечатано в ОАО «Щербинская типография».
117623, Москва, Типографская ул., д. 10. Тел. (495) 659-23-27.

ISBN 978-5-4439-0066-7

Предисловие ко второму изданию

О теории множеств мне довелось услышать, когда я учился в восьмом классе. Однажды я попал на лекцию, которую прочел для московских школьников И. М. Гельфанд — тогда начинающий доцент, а ныне член-корреспондент АН СССР[1]. В течение двух часов он рассказывал нам о совершенно невероятных вещах: что натуральных чисел столько же, сколько и четных, рациональных столько же, сколько и натуральных, а точек на отрезке столько же, сколько и в квадрате.

Знакомство с теорией множеств было продолжено в годы обучения на механико-математическом факультете МГУ. Наряду с лекциями и семинарами там существовал своеобразный метод обучения, о котором, возможно, и не подозревали профессора и доценты. После занятий (а иногда — что уж греха таить — и во время не слишком интересных лекций) студенты бродили по коридорам старого здания на Моховой и обсуждали друг с другом интересные задачи, неожиданные примеры и остроумные доказательства. Именно в этих разговорах студенты-первокурсники узнавали от своих старших товарищей, как строить кривую, проходящую через все точки квадрата, или функцию, не имеющую нигде производной, и т. д.

Разумеется, объяснения давались, как говорится, «на пальцах», и идти сдавать экзамен, прослушав эти объяснения, было бы непростительным легкомыслием. Но ведь об экзамене не было и речи — по учебному плану курс теории функций действительного переменного надо было сдавать еще через два года. Но как же потом, при слушании лекций и сдаче экзаменов, помогала «коридорная» подготовка! По поводу каждой теоремы вспоминались интересные задачи, которые приходилось решать раньше, остроумные сравнения, наглядные образы.

Мне захотелось рассказать читателю о теории множеств примерно в том же стиле, в каком я сам изучал ее, проходя «коридорный» курс обучения. Поэтому основное внимание будет обращено на то, чтобы сделать ясной постановку задач, рассказать о неожиданных и удивительных примерах, сплошь и рядом противоречащих

[1]В настоящее время — академик РАН. — *Прим. ред.*

наивному представлению, которыми так богата теория функций действительного переменного. И если, прочтя эту книгу, школьник старших классов или студент первых курсов университета или пединститута почувствует желание более глубоко изучить теорию множеств, теорию функций действительного переменного, автор будет считать, что его цель достигнута.

* * *

Из серьезных курсов можно было бы рекомендовать следующие:[1]

1. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.

2. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа, Изд-во МГУ, ч. 1, 1954, ч. 2, 1960; Наука, 1981.

3. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, 1948.

4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950; Наука, 1974.

5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств, ОНТИ, 1937.

6. *Куратовский К.*, *Мостовский А.* Теория множеств, «Мир», 1970.

Много интересных задач по теории множеств собрано в книге Ю. С. Очана «Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного» («Просвещение», 1965).

По некоторым вопросам, затронутым здесь, много интересных сведений содержится в книге А. С. Пархоменко «Что такое линия» (ГИТТЛ, 1954). В конце книги приведен ряд задач по теории функций действительного переменного, решение которых будет полезно читателю. Отметим еще, что некоторые более трудные места можно при первом чтении пропустить без ущерба для понимания дальнейшего. Эти места мы отметили звездочками.

[1] Список литературы обновлён. — *Прим. ред.*

Глава I. Множества и действия над ними

Что такое множество

В этой главе будет рассказано о том, что такое множества и какие действия можно выполнять над ними. К сожалению, основному понятию теории — понятию множества — нельзя дать строгого определения. Разумеется, можно сказать, что множество — это «совокупность», «собрание», «ансамбль», «коллекция», «семейство», «система», «класс» и т. д. Однако все это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Для того чтобы определить какое-либо понятие, нужно прежде всего указать, частным случаем какого более общего понятия оно является. Для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет.

Поэтому вместо того, чтобы дать определение понятию множества, мы проиллюстрируем его на примерах.

Часто приходится говорить о нескольких вещах, объединенных некоторым общим признаком. Так, можно говорить о множестве всех стульев в комнате, о множестве всех атомов на Юпитере, о множестве всех клеток человеческого тела, о множестве всех картофелин в данном мешке, о множестве всех рыб в океане, о множестве всех квадратов на плоскости, о множестве всех точек на данной окружности и т. д.

Предметы, составляющие данное множество, называются его *элементами*. Для того чтобы указать, что данное множество A состоит из элементов x, y, $\ldots$, z, обычно пишут

$$A = \{x,\ y,\ \ldots,\ z\}.$$

Например, множество дней недели состоит из элементов {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}, множество месяцев — из элементов {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь}, множество арифметических действий — из элементов {сложение, вычитание, умножение, деление}, а множество корней квадратного уравнения $x^2 - 2x - 24 = 0$ — из двух чисел: -4 и 6, то есть имеет вид $\{-4,\ 6\}$.

Фигурные скобки в обозначении множества показывают, что элементы объединены в одно целое — множество A. Тот факт, что элемент x принадлежит множеству A, записывают с помощью знака $\in$ так: $x \in A$. Если же данный элемент x не принадлежит множеству A, то пишут $x \overline{\in} A$. Например, если A означает множество всех четных натуральных чисел, то $6 \in A$, а $3 \overline{\in} A$. Если A — множество всех месяцев в году, то май $\in A$, а среда $\overline{\in} A$.

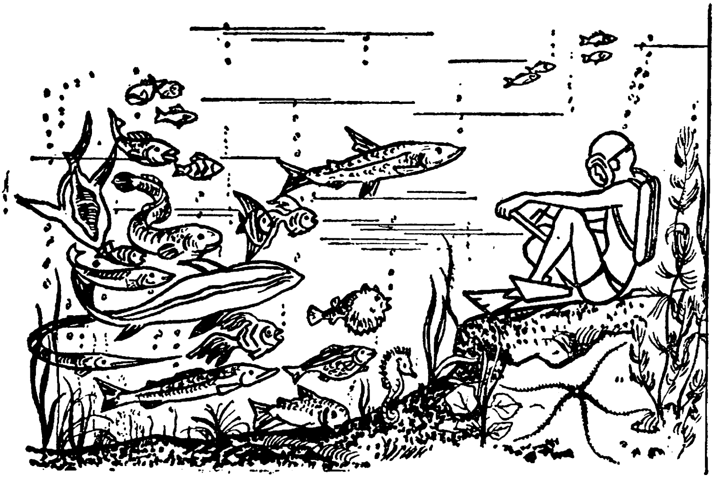
Таким образом, когда мы говорим о множестве, то объединяем некоторые предметы в одно целое, а именно в множество, элементами которого они являются. Основатель теории множеств Георг Кантор подчеркнул это следующими словами: «*Множество есть многое, мыслимое нами как единое*». Собственно говоря, элементы множества могут и не быть реально существующими предметами — в богословских трактатах всерьез изучаются взаимоотношения в множествах архангелов, злых духов и т. д.

Для того чтобы наглядно представить себе понятие множества, академик Н. Н. Лузин предложил следующий образ. Представим прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого прозрачного мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы данного множества A, и что кроме них внутри оболочки никаких других предметов не находится. Эта оболочка с предметами x, находящимися внутри нее, и может служить образом множества A, составленного из элементов x. Сама же эта прозрачная оболочка, охватывающая все элементы (и ничего другого кроме них), довольно хорошо изображает тот акт объединения элементов x, в результате которого создается множество A.

Если множество содержит конечное число элементов, то его называют *конечным*, а если в нем бесконечно много элементов, то *бесконечным*. Так, множество деревьев в лесу конечно, а множество точек на окружности бесконечно.

Как задают множества

Возможны различные способы задания множества. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих в множество. Например, множество учеников данного класса определяется их списком в классном журнале, множество всех стран на земном шаре — их списком в географическом атласе, множество всех костей в человеческом скелете — их списком в учебнике анатомии.

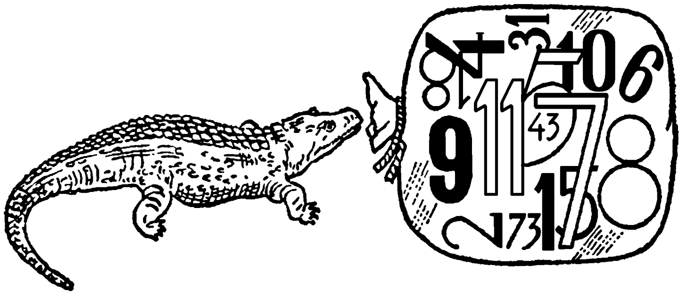


Великая перепись рыб

Но этот способ применим только к конечным множествам, да и то далеко не ко всем. Например, хотя множество всех рыб в океане и конечно, вряд ли его можно задать списком. А уж бесконечные множества никак нельзя определять с помощью списка; попробуйте, например, составить список всех натуральных чисел или список всех точек окружности — ясно, что составление этого списка никогда не закончится.

В тех случаях, когда множество нельзя задать при помощи списка, его задают путем указания некоторого характеристического свойства — такого свойства, что элементы множества им обладают, а все остальное на свете не обладает. Например, мы можем говорить о множестве всех натуральных чисел. Тогда ясно, что число 73 принадлежит этому множеству, а число $\frac{3}{4}$ или крокодил не принадлежат. Точно так же $\sqrt{2}$ и планета Сатурн не принадлежат множеству всех рациональных чисел, а $\frac{7}{15}$ принадлежит этому множеству.

В геометрии часто приходится иметь дело с множествами точек, заданными теми или иными характеристическими свойствами. Обычно, следуя древним традициям, множество точек с данным характеристическим свойством в геометрии называют *геометрическим местом точек*. Например, говорят так: «Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости». Это означает, что множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки этой плоскости, совпадает с множеством точек некоторой окружности.



Крокодил не входит в множество натуральных чисел

Задание множеств их характеристическими свойствами иногда приводит к осложнениям. Может случиться, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, то есть всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и обратно. Например, множество толстокожих сухопутных животных, имеющих два бивня, совпадает с множеством толстокожих животных, имеющих хобот, — это множество слонов.

В геометрии свойство «точка M равноудалена от сторон угла AOB» задает то же точечное множество, что и свойство «угол AOM равен углу MOB» (здесь рассматриваются точки плоскости, лежащие внутри угла AOB, см. рис. 1). А в арифметике свойство «целое число делится на 2» задает то же множество, что и свойство «последняя цифра целого числа делится на 2».

Иногда бывает трудно доказать равносильность двух характеристических свойств. Попробуйте, например, доказать, что следующие свойства задают одно и то же множество точек, лежащих в одной плоскости с треугольником ABC:

а) основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC, лежат на одной прямой;

б) точка M лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 2).

(Совпадение этих множеств составляет содержание так называемой теоремы Симсона и теоремы, обратной ей.)

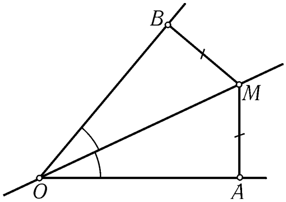


Рис. 1

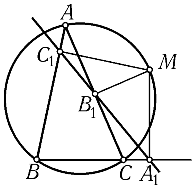


Рис. 2

Вообще, во многих математических теоремах речь идет о совпадении двух множеств, например множества равносторонних треугольников с множеством равноугольных треугольников, множества описанных четырехугольников с множеством четырехугольников, суммы противоположных сторон которых равны, и т. д. В некоторых случаях проблема совпадения или различия двух множеств, заданных своими характеристическими свойствами, не решена до сих пор. Так, до сих пор неизвестно, совпадает ли множество $\{1093, 3511\}$ с множеством простых чисел n, для которых $2^n - 2$ делится на n^2.

Еще большие трудности при задании множеств их характеристическими свойствами возникают из-за недостаточной четкости обыденного языка, неоднозначности человеческой речи. Большое число промежуточных форм затрудняет разграничение объектов на принадлежащие и не принадлежащие данному множеству. Пусть, например, речь идет о множестве всех деревьев на земном шаре. В первую очередь здесь надо определить, идет ли речь обо всех деревьях, которые существовали и будут существовать на Земле, или о деревьях, существовавших в течение некоторого фиксированного промежутка времени (например, с 1 мая по 1 сентября 1965 года). Но тогда возникает вопрос, как быть с деревьями, спиленными за этот промежуток времени? Кроме того, существует целый ряд промежуточных форм между деревьями и другими растениями, и надо решить, какие из них относятся к множеству деревьев, а какие нет.

Даже множество планет Солнечной системы определено не вполне однозначно. Наряду с большими планетами (Меркурием, Венерой, Землей, Марсом, Юпитером, Сатурном, Ураном, Нептуном и Плутоном) вокруг Солнца обращается около 1600 малых планет, так называемых астероидов. Поперечники некоторых таких планет (Цереры, Паллады, Юноны и других) измеряются сотнями километров, но есть и астероиды, поперечник которых не превышает 1 км. По мере улучшения методов наблюдения астрономы будут открывать все более и более мелкие планеты, и наконец возникнет вопрос, где же кончаются планеты и начинаются метеориты и космическая пыль. Аналогичное затруднение было у одного героя Бабеля, вопившего после налета банды Бени Крика: «Где начинается полиция и где кончается Беня?» Как известно, мудрые одесситы отвечали ему, что полиция кончается именно там, где начинается Беня Крик. Но вряд ли фраза «Планеты кончаются именно там, где начинаются метеориты» устроит кого-либо в качестве точного определения множества планет Солнечной системы.

Впрочем, разница между планетами и метеоритами интересует в основном астрономов. А вот разница между домом и хибаркой существенна для обитателя любого жилища. Но легко представить себе, что одно и то же здание получит от одного человека уважительное название «дом», а от другого — пренебрежительное прозвище «хибарка». Разумеется, и отнесение того или иного здания к множеству дворцов существенно зависит от того, кому поручено составить список этого множества.

Точно так же рассмотрение множества всех стихотворений, опубликованных в России, осложняется наличием многочисленных промежуточных форм между стихами и прозой (ритмическая проза, белые стихи и т. д.). Не слишком точно определено и множество лиц, пользующихся правом бесплатного проезда по железным дорогам страны. К этому множеству относятся, в частности, дети до 5 лет. Но может случиться, что малолетнему пассажиру исполнится 5 лет в пути, и тогда неясно, относится ли он к этому множеству (рассказывают, что один пунктуальный отец включил стоп-кран в момент, когда его сыну исполнилось пять лет, чтобы точно определить оставшийся отрезок пути, за который ему следовало уплатить).

Тонкости возникают и в более простых случаях и связаны с неточностью и несовершенством обычного языка. Пусть, например, A есть множество, состоящее из первых n натуральных чисел, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, где n — число букв первой строки основного текста «Евгения Онегина». Такое определение можно понимать двояко. С одной стороны, под числом n можно понимать совокупное количество всех вхождений букв в первую строку (так сказать, общее количество типографских знаков в строке). Выпишем эту строку и отметим различные вхождения одной и той же буквы соответствующими порядковыми номерами:

$$\text{М}_1,\ \text{О}_1,\ \text{Й}_1,\quad \text{Д}_1,\ \text{Я}_1,\ \text{Д}_2,\ \text{Я}_2,\quad \text{С}_1,\ \text{А}_1,\ \text{М}_2,\ \text{Ы}_1,\ \text{Х}_1,$$
$$\text{Ч}_1,\ \text{Е}_1,\ \text{С}_2,\ \text{Т}_1,\ \text{Н}_1,\ \text{Ы}_2,\ \text{Х}_2,\quad \text{П}_1,\ \text{Р}_1,\ \text{А}_2,\ \text{В}_1,\ \text{И}_1,\ \text{Л}_1.$$

Получается, что $n = 25$ и $A = \{1, 2, \ldots, 25\}$.

С другой стороны, под числом n можно понимать общее число различных букв русского алфавита, встречающихся в первой строке. Вот эти буквы:

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л.

Тогда получается, что $n = 18$ и $A = \{1, 2, \ldots, 18\}$.

Приведенный пример показывает, с какой тщательностью нужно формулировать определение множества, чтобы избежать неясности и двусмысленности, свойственных обычному нашему языку.

Брить или не брить?

Не всегда затруднения с определением состава множества зависят только от недостатков языка. Иногда причина лежит гораздо глубже. Приведем следующий пример. Как правило, сами множества не являются своими собственными элементами (например, множество всех натуральных чисел не является натуральным числом, множество всех треугольников не является треугольником и т. д.).

Однако бывают и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов. Скажем, множество абстрактных понятий само является абстрактным понятием (не правда ли?). Так как такие множества рассматриваются редко, назовем их *экстраординарными*, а все остальные множества — *ординарными*.

Образуем теперь множество A, элементами которого являются все ординарные множества. На первый взгляд кажется, что в этом определении нет ничего плохого; не видно, почему фраза «множество всех ординарных множеств» хуже, чем фраза «множество всех треугольников». Но на самом деле здесь возникает серьезное логическое противоречие. Попробуем выяснить, каким же является само полученное множество A — ординарным или экстраординарным. Если оно ординарно, то оно входит в себя как один из элементов (мы ведь собрали вместе все ординарные множества). Но тогда по определению оно является экстраординарным. Если же множество A экстраординарно, то по определению экстраординарности оно должно быть своим собственным элементом, а среди элементов множества A есть лишь ординарные множества, экстраординарных множеств мы не брали!

Получилось логическое противоречие — множество A не может быть ни ординарным, ни экстраординарным. Впрочем, такие логические противоречия возникают и в гораздо более простых случаях. Например, одному солдату приказали брить тех и только тех солдат его взвода, которые не бреются сами. Возник вопрос, как ему поступать с самим собой. Если он будет брить себя, то его следует отнести к числу солдат, которые бреются сами, а брить таких солдат он не имеет права. Если же он себя брить не будет, то его придется отнести к числу солдат, которые сами не бреются, а тогда по приказу он должен себя брить.

Брить или не брить?

Известны и другие примеры, когда множество, на первый взгляд вполне определенное, оказывается определенным очень плохо, а лучше сказать — совсем неопределенным. Например, пусть множество A состоит из всех рациональных чисел, которые можно определить при помощи не более чем двухсот русских слов (включая сюда и слова «нуль», «один», «два» и т. д.).

Так как множество всех русских слов конечно (для простоты будем считать, что берутся лишь слова из словаря Ожегова и их грамматические формы), то и множество таких чисел конечно. Пусть это будут числа r_1, r_2, …, r_N. Определим теперь рациональное число r следующим образом:

$$r = 0,n_1n_2\ldots n_N,$$

где n_i (i-й десятичный знак числа r) равен 1, если i-й десятичный знак числа r_i отличен от единицы, в противном же случае $n_i = 2$.

Число r не совпадает с r_1, так как отличается от него первым десятичным знаком, не совпадает с r_2, так как отличается от него вторым десятичным знаком, и т. д. Поэтому число r не входит в множество A. Между тем это число определено нами при помощи не более чем двухсот слов.

С этим парадоксом тесно связан следующий:

Каково то *наименьшее целое число, которое нельзя определить при помощи фразы, имеющей менее ста русских слов?*

Такое число существует, поскольку число слов в русском языке конечно, а значит, есть числа, которые нельзя определить фразой, имеющей менее ста слов. Но тогда среди этих чисел есть наименьшее.

С другой стороны, такого числа не существует, ибо оно определяется фразой из менее чем ста слов, напечатанной выше курсивом, а по смыслу этой фразы оно не может быть определено подобным образом.

★ А вот более сложный пример конечного множества, относительно которого оказывается невозможным сказать, содержит ли оно данный элемент. Разделим все прилагательные в русском языке на два класса. К первому классу отнесем все прилагательные, для которых выражающее их слово само обладает свойством, описываемым этим прилагательным, а ко второму — прилагательные, не обладающие описываемым им свойством. Например, прилагательное «русское» отнесем к первому классу, так как слово «русское» принадлежит к словарному запасу русского языка. К тому же классу отнесем и прилагательное «пятисложное», так как в слове «пятисложное» именно пять слогов. А прилагательное «немецкое» отнесем во второй класс, так как слово «немецкое» входит в словарный состав русского, а не немецкого языка. Во второй класс попадет и слово «односложное», так как в этом слове не один, а пять слогов. Туда же попадет и слово «синее», так как это слово само цветом не обладает, а только выражает некоторый цвет.

Казалось бы, все в полном порядке и каждое прилагательное нашло свое место. Но для того, чтобы отличить полученные два класса друг от друга, введем еще два прилагательных. Назовем все прилагательные первого класса «автологичными» (от греческих слов «авто» — сам и «логос» — смысл, закон), а прилагательные второго класса «гетерологичными» («гетерос» — другой). Слова «автологичный» и «гетерологичный» являются прилагательными, и их надо разместить по нашим классам. Слово «автологичный» можно отправить в первый класс, и тогда оно будет обладать именно тем свойством, которое само выражает, — ведь в первом классе собраны именно автологичные слова. Но и во втором классе оно будет смотреться неплохо (не обладая «гетерологичностью»). А вот слово «гетерологичный», напротив, относить некуда — оно доставляет те же трудности, что и взводный цирюльник.

Его нельзя отнести в класс автологичных слов, так как тогда слово «гетерологичный» должно было бы само обладать свойством, выражаемым этим словом, а это свойство заключается в том, что ему надо быть не в первом, а во втором классе. Нельзя его отнести и во второй класс, так как тогда оно должно было бы не обладать выражаемым им свойством гетерологичности, а потому быть автологичным, второй же класс автологичных слов не содержит. ★

В теории множеств накопилось много таких случаев, когда определение множества было внутренне противоречивым. Изучение вопроса, при каких условиях это может иметь место, привело к глубоким исследованиям в области логики, совершенно изменившим лицо этой науки. Многие из этих исследований впоследствии были использованы для построения теории быстродействующих вычислительных машин, теории автоматов и т. д. Но эти исследования относятся уже к математической логике, и мы оставим их в стороне.

Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь множества, которые определены точно и без противоречий и состав которых не вызывает сомнений (такие, как множество всех натуральных чисел, всех квадратов на плоскости и т. д.).

Оглавление

Предисловие ко второму изданию **3**

Глава I. Множества и действия над ними **5**

Что такое множество 5
Как задают множества 6
Брить или не брить? 11
Пустое множество 15
Теория множеств и школьная математика 16
Подмножества 20
Теория множеств и комбинаторика 22
Универсальное множество 24
Пересечение множеств 24
Сложение множеств 29
Разбиение множеств 32
Арифметика остатков 33
Вычитание множеств 35
Алгебра множеств 36
Планета мифов 41
Булевы алгебры 45

Глава II. В мире чудес бесконечного **48**

Тайны бесконечности 48
Необыкновенная гостиница, или тысяча первое путешествие Йона Тихого 51
Как сравнивать множества 59
На танцплощадке 60
На каждый прилив — по отливу 61
Равна ли часть целому? 63
Счетные множества 65
Алгебраические числа 67
Восьмерки на плоскости 70
Неравные множества 72
Счетное множество — самое маленькое из бесконечных 74
Несчетные множества 75
Несостоявшаяся перепись 76
Несчетность континуума 78
Существование трансцендентных чисел 80
На длинном и коротком отрезках поровну точек 81
Отрезок и квадрат 82

Одна задача почему-то не выходит 85
Существует ли множество самой большой мощности? 86
Арифметика бесконечного 88
Возведение в бесконечную степень 90
По порядку номеров... 91
Вполне упорядоченные множества 92
Непонятная аксиома 94
Из одного яблока — два 96
Конечные разбиения 97

Глава III. Удивительные функции и линии, или прогулки по математической кунсткамере 99

Как развивалось понятие функции 99
Джинн выходит из бутылки 102
Мокрые точки 104
Чертова лестница 107
Колючая линия 109
Замкнутая линия бесконечной длины 112
Математический ковер 114
Евклид отказывает в помощи 117
Нужны ли строгие определения? 118
Линия — след движущейся точки 120
Теорема очевидна, доказательство — нет 122
Кривая проходит через все точки квадрата 123
Все лежало в развалинах 125
Как делают статуи 126
Континуумы 128
Канторовы линии 129
Всегда ли площадь линии равна нулю? 130
Области без площади 132
Неожиданные примеры 134
Области и границы 135
Большие ирригационные работы 136
«Недиссертабельная» тема 138
Индуктивное определение размерности 139
Работу надо не рецензировать, а печатать! 141

Заключение 144

Примеры и упражнения 145

Серия книг «Школьные математические кружки»

- Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и геометрии. 2012
- Блинков А. Д., Блинков Ю. А. Геометрические задачи на построение. 2010
- Гуровиц В. М., Ховрина В. В. Графы. 2011
- Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. 2011
- Медников Л. Э. Чётность. 2011
- Мерзон Г. А., Ященко И. В. Длина, площадь, объём. 2011
- Сгибнев А. И. Делимость и простые числа. 2012
- Чулков П. В. Арифметические задачи. 2012
- Шаповалов А. В. Как построить пример? 2013