В. И. Арнольд

ЛЕКЦИИ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 517.95
ББК 22.161.6
А84

Арнольд В. И.
А84 Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: МЦНМО, 2017. — 182 с.

ISBN 978-5-4439-1174-8

Данный курс был разработан и прочитан выдающимся математиком В. И. Арнольдом в Независимом московском университете. Помимо традиционных вопросов курса уравнений с частными производными (метод Даламбера, метод Фурье, краевые задачи и т. д.) автор уделяет большое внимание взаимодействию с другими областями математики: геометрией и топологией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике.

ББК 22.161.6

12+

Публикуется по изданию: *В. И. Арнольд*. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Фазис, 1997.

ISBN 978-5-4439-1174-8

Оглавление

Предисловие

Теория уравнений с частными производными считалась в середине XX века вершиной математики — как вследствие трудности и значения решаемых ею задач, так и потому, что она сформировалась позже большинства математических дисциплин.

Сегодня многие склонны пренебрежительно рассматривать эту замечательную область математики как старомодное искусство жонглирования неравенствами или как полигон для приложений функционального анализа. Соответствующий курс даже исключён из обязательной программы ряда университетов (например, в Париже). Более того, такие замечательные учебники, как классический трёхтомник Гурса, были выкинуты библиотекой университета Париж-7 за ненадобностью (и только благодаря моему вмешательству удалось спасти их, наряду с курсами лекций Клейна, Пикара, Эрмита, Дарбу, Жордана, …).

Причина вырождения важной общематематической теории в бесконечный поток работ «Об одном свойстве одного решения одной краевой задачи для одного уравнения» состоит, вероятно, в попытке создать единую всеобъемлющую сверхабстрактную «теорию всего».

Основным источником уравнений с частными производными являются модели сплошных сред математической и теоретической физики. Попытки распространить замечательные достижения математической физики на сходные с её моделями лишь формально системы приводят к сложным и труднообозримым теориям, подобно тому, как попытки распространить геометрию поверхностей второго порядка и алгебру квадратичных форм на объекты более высоких степеней быстро заводят в дебри алгебраической геометрии с её обескураживающей иерархией сложных вырождений и вычислимыми лишь принципиально ответами.

В теории уравнений с частными производными положение ещё хуже: трудности коммутативной алгебраической геометрии соединяются здесь с некоммутативной дифференциальной алгеброй совершенно неразделимым образом, и вдобавок возникающие вопросы топологии и анализа глубоко нетривиальны.

В то же время общефизические принципы и такие общие понятия, как энергия, вариационный принцип, принцип Гюйгенса, лагранжиан, преобразование Лежандра, гамильтониан, собственные числа и собственные функции, двойственность «волна-частица», дисперсионные соотношения, фундаментальные решения, прекрасно работают в многочисленных важнейших задачах математической физики. Их исследование стимулировало развитие больших отделов математики, таких как теория рядов и интегралов Фурье, функциональный анализ, алгебраическая геометрия, симплектическая и контактная топология, теория асимптотик интегралов, микролокальный анализ, теория индекса (псевдо)дифференциальных операторов и т. д.

Знакомство с этими фундаментальными математическими идеями является, на мой взгляд, абсолютно необходимым для каждого работающего математика. Их исключение из университетского преподавания математики, совершившееся или совершающееся во многих западных университетах под влиянием схоластов-аксиоматизаторов (не знакомых ни с какими приложениями и не желающих знать ничего, кроме «абстрактной чепухи» алгебраистов), представляется мне крайне опасным последствием бурбакизации и математики, и её преподавания. Стремление уничтожить ненужную схоластическую псевдонауку является естественной и законной реакцией общества (в том числе научного) на безответственную и самоубийственную агрессивность «сверхчистых» математиков, воспитанных в духе Харди и Бурбаки.

Автор этого очень короткого курса лекций старался познакомить с калейдоскопом фундаментальных идей математики и физики студентов-математиков с минимальными познаниями (линейная алгебра и основы анализа, включая обыкновенные дифференциальные уравнения). Вместо обычного в математических книгах принципа наибольшей общности автор старался придерживаться принципа минимальной общности, согласно которому каждая идея должна быть вначале ясно понята в простейшей ситуации и только затем развитый метод может переноситься на более сложные случаи.

Хотя доказательство общего факта обычно бывает проще, чем доказательство его многочисленных частных случаев, содержание математической теории для обучающегося не больше, чем набор хорошо и до конца понятых им примеров. Поэтому именно примеры и идеи, а не общие теоремы и аксиомы, составляют основу этой книги. Экзаменационные задачи в конце курса составляют существенную его часть.

Особое внимание было уделено взаимодействию предмета с другими областями математики: геометрией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением, топологией. Автор рассчитывал на любознательного студента, но надеется, что даже профессиональные математики других специальностей смогут познакомиться по этой книжке с основными и потому простыми идеями математической физики и теории уравнений с частными производными.

Настоящий курс был прочитан студентам третьего курса Математического колледжа Независимого московского университета в осеннем семестре 1994/95 учебного года, причём лекции 4 и 5 были прочитаны Ю. С. Ильяшенко, лекция 8 — А. Г. Хованским. Все лекции были записаны В. М. Имайкиным (составленный им конспект был затем переработан автором). Автор выражает всем им глубокую благодарность.

Лекция 1

Общая теория для одного уравнения первого порядка

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, нет единой теории уравнений с частными производными. Некоторые уравнения имеют свои теории, для других теории нет вообще. Это связано с более сложной геометрией. В случае обыкновенного уравнения на многообразии задано векторное поле, которое локально интегрируемо (имеет интегральные кривые). В случае уравнения с частными производными в каждой точке многообразия задано подпространство касательного пространства размерности больше 1. Как известно, уже поле двумерных плоскостей в трёхмерном пространстве в общем случае не интегрируемо.

Пример. В пространстве с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = y\,dx$ (в каждой точке это одно линейное уравнение на координаты касательного вектора, задающее плоскость).

Задача 1. Нарисуйте это поле плоскостей и докажите, что у него нет интегральной поверхности, т. е. такой поверхности, у которой в каждой точке касательная плоскость совпадает с плоскостью поля.

Таким образом, интегрируемые поля плоскостей — исключительное явление.

Подмногообразие, касательная плоскость которого в каждой точке принадлежит подпространству поля, называется *интегральным подмногообразием* поля касательных подпространств на многообразии. Если удаётся провести интегральное подмногообразие, его размерность обычно не совпадает с размерностью плоскостей поля.

В этой лекции мы рассмотрим случай, в котором есть полная теория, а именно случай одного уравнения первого порядка. С физической точки зрения этот случай представляет собой двойственность описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Поле удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных первого порядка, эволюция частиц описывается системой ОДУ, имеется приём сведения УРЧП к системе ОДУ; тем самым можно свести изучение распространения волн к изучению эволюции частиц.

Запишем всё в локальной системе координат: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — координаты (независимые переменные), $y = u(x)$ — неизвестная функция координат, сама буква y обозначает координату на оси значений, частные производные обозначим p,

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}.$$

Общее уравнение с частными производными первого порядка имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n, y, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Примеры.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0; \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

(уравнение эйконала в геометрической оптике);

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.3}$$

(уравнение Эйлера).

Рассмотрим выпуклую замкнутую кривую на плоскости с координатами x_1, x_2. Вне области, ограниченной кривой, рассмотрим функцию u расстояния до этой кривой. Тогда u — гладкая функция.

Теорема 1. *Функция u удовлетворяет уравнению* (1.2).

Доказательство. В уравнении (1.2) написано, что квадрат градиента функции u равен 1. Напомним геометрический смысл градиента: это вектор, в направлении которого скорость изменения функции наибольшая, а его длина равна абсолютной величине этой скорости. Теперь утверждение теоремы очевидно. □

Задача 2. а) Докажите, что любое решение уравнения (1.2) локально является суммой расстояния до некоторой кривой и константы.

б) Поймите, где тут двойственность описания при помощи волн и частиц (в случае затруднений ср. ниже с. 23, рис. 2.2).

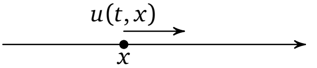

Рис. 1.1. Частица на прямой

Рассмотрим поле $u(t,x)$ скоростей свободно двигающихся по прямой частиц (см. рис. 1.1). Закон свободного движения частицы имеет вид

$$x=\varphi(t)=x_0+vt,$$

где v — скорость частицы. Функция φ удовлетворяет уравнению Ньютона $d^2\varphi/dt^2=0$. Дадим теперь описание движения через поле u скоростей: по определению $d\varphi/dt=u(t,(\varphi(t))$. Дифференцируем по t и получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=u_t+u_xu=0.$$

Обратно, из уравнения Эйлера можно вывести уравнение Ньютона, т. е. эти описания движения при помощи уравнения Эйлера для поля и при помощи уравнения Ньютона для частиц эквивалентны. Мы и в общем случае построим процедуру, позволяющую свести уравнения для волн к уравнениям эволюции частиц. Но сначала рассмотрим более простые примеры линейных уравнений.

1. Пусть $v=v(x)$ — векторное поле на многообразии или в области евклидова пространства. Рассмотрим уравнение $L_v(u)=0$, где оператор L_v обозначает производную по направлению векторного поля (производную Ли).

В координатах это уравнение имеет вид

$$v_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+v_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0;$$

оно называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка*.

Чтобы функция u была его решением, необходимо и достаточно, чтобы она была постоянна вдоль фазовых кривых поля v. Таким образом, *решения нашего уравнения — первые интегралы поля*.

Например, рассмотрим поле

$$v=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

см. рис. 1.2. Решим уравнение $L_v(u)=0$ для этого поля v. Фазовые кривые — лучи $x=e^tx_0$, выходящие из начала координат. Решение должно быть постоянно на каждом таком луче. Если наложить условие непрерывности в начале координат, то получим, что решения — константы и только они. Константы образуют одномерное линейное пространство (решения линейного уравнения должны образовывать линейное пространство).

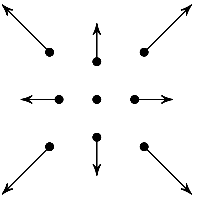

Рис. 1.2. Эйлерово поле

В отличие от этого примера, в общем случае решения линейного УРЧП образуют бесконечномерное линейное пространство. Например, для уравнения $\partial u/\partial x_1 = 0$ пространство решений совпадает с пространством функций от $n-1$ переменной: $u = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$.

Оказывается, то же самое верно для уравнения общего положения в окрестности регулярной точки.

Задача Коши. Пусть Γ^{n-1} — гладкая гиперповерхность в x-пространстве. *Задачей Коши* называется следующая задача: *найти решение уравнения $L_v(u) = 0$, совпадающее на гиперповерхности с заданной функцией* (см. рис. 1.3).

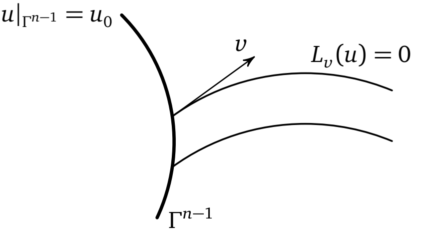

Рис. 1.3. Задача Коши

Точка гиперповерхности называется *нехарактеристической*, если поле v в ней трансверсально поверхности.

Теорема 2. *Задача Коши однозначно разрешима в окрестности каждой нехарактеристической точки.*

Доказательство. При помощи гладкой замены переменных выпрямим векторное поле, а Γ превратим в гиперплоскость $x_1 = 0$. Тогда в малой окрестности нехарактеристической точки получим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{0, x_2, \ldots, x_n} = u_0(x_2, \ldots, x_n),$$

которая решается однозначно. □

2. Рассмотрим задачу Коши для более общего — *линейного неоднородного* уравнения:

$$L_v(u) = f, \quad u|_{\Gamma^{n-1}} = u_0.$$

Решения такой задачи образуют *аффинное* пространство (общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного).

Гладкой заменой переменной задача приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u|_{0, x_2, \ldots, x_n} = u_0(x_2, \ldots, x_n).$$

Эта задача решается однозначно:

$$u(x_1, \ldots) = u_0(\ldots) + \int\limits_0^{x_1} f(\xi, \ldots)\, d\xi.$$

3. *Квазилинейным* называется уравнение, линейное по производным. В координатах квазилинейное уравнение первого порядка имеет вид

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u). \tag{1}$$

Заметим, что в первых двух случаях поле v связано с дифференциальным оператором инвариантно (независимо от координат). Как инвариантно связать геометрический объект с квазилинейным уравнением?

Рассмотрим пространство с координатами $(x_1, \ldots, x_n, y)$ — пространство 0-*струй функций* от $(x_1, \ldots, x_n)$, обозначаемое $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ или, короче, J^0.

Напомню, что *пространством k-струй* функций от $(x_1, \ldots, x_n)$ называется пространство многочленов Тейлора степени k.

Заметим, что аргумент $(x_1, \ldots, x_n, y, p_1, \ldots, p_n)$ в уравнении 1-го порядка является 1-струёй функции. Поэтому уравнение 1-го порядка можно понимать как гиперповерхность в пространстве 1-струй функций $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Пространство 1-струй вещественнозначных функций от n переменных можно отождествить с $(2n+1)$-мерным пространством: $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2n+1}$. Например, для функций на плоскости получаем пятимерное пространство 1-струй.

Решение уравнения (1) строится при помощи его характеристик (кривых специального вида в J^0). Слово «характеристический» в математике всегда означает «инвариантно связанный». Например, характеристический многочлен матрицы оператора инвариантно связан с оператором и не зависит от базиса, при помощи которого составлена матрица. Характеристические подгруппы группы — это подгруппы, инвариантные относительно автоморфизмов группы. Характеристические классы в топологии инвариантны относительно соответствующих отображений.

Векторное поле v (в пространстве независимых переменных) называется *характеристическим полем* линейного уравнения $L_v(u) = f$.

Определение. *Характеристическим полем квазилинейного уравнения* (1) называется векторное поле A в пространстве J^0 с компонентами $(a_1, \ldots, a_n, f)$.

Утверждение. *Направление этого поля является характеристическим.*

Действительно, пусть u — решение. График его — некоторая гиперповерхность в J^0. Эта гиперповерхность касается поля A, что выражено в уравнении. Верно и обратное: если график функции всюду касается поля A, то она является решением.

Отсюда становится ясным способ решения квазилинейного уравнения. Проведём в J^0 фазовые кривые характеристического поля. Они называются характеристиками. Если характеристика имеет общую точку с графиком решения, то она вся лежит на нём, так что график составлен из характеристик.

Задача Коши для квазилинейного уравнения ставится аналогично предыдущим случаям. А именно, пусть в x-пространстве задана гладкая гиперповерхность Γ^{n-1}, а на ней — начальная функция u_0. График этой функции есть поверхность $\widehat{\Gamma}$ в J^0, которую мы рассматриваем в качестве начального подмногообразия (см. рис. 1.4).

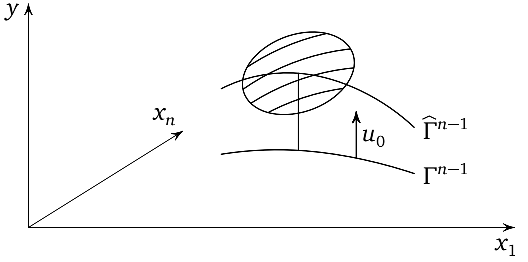

Рис. 1.4. Характеристики квазилинейного уравнения, проходящие через начальное многообразие $\widehat{\Gamma}^{n-1}$

Если характеристики не касаются начальной гиперповерхности $\widehat{\Gamma}$, то локально из них составляется график решения.

Нехарактеристичность точки в данном случае складывается из двух условий: поле A не должно касаться $\widehat{\Gamma}^{n-1}$, и, чтобы получился действительно график, вектор поля должен быть не вертикален, т. е. компонента a отлична от 0.

Точки, в которых $a=0$, особые; в них дифференциальное уравнение исчезает, превращаясь в алгебраическое.

Пример. Для уравнения Эйлера $u_t+uu_x=0$ уравнение характеристик эквивалентно уравнению Ньютона: $\dot{t}=1$, $\dot{x}=u$, $\dot{u}=0$.

Теперь перейдём к общему уравнению первого порядка.

Рассмотрим пространство 1-струй $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Вместо $\mathbb{R}^n$ можно рассмотреть n-мерное многообразие B^n, тогда получим пространство $J^1(B^n,\mathbb{R})$; пусть (x,y,p) — локальные координаты в нём.

Уравнением с частными производными первого порядка будем называть гладкую гиперповерхность в J^1: $\Gamma^{2n}\subset J^1$.

Например, при $n=1$ получим неявное (не разрешённое относительно производной) ОДУ.

Оказывается, в нашем пространстве J^1 имеется замечательная геометрическая структура — инвариантно заданное распределение $2n$-мерных гиперплоскостей. Например, при $n=1$ получаем поле плоскостей в трёхмерном пространстве. Структура появляется только в результате того, что пространство есть пространство 1-струй. Аналогичная структура возникает и в пространствах струй более высокого порядка, там она называется распределением Картана.

Каждая функция в пространстве k-струй имеет *k-график*. В случае 0-струй это обычный график — множество 0-струй функции:

$$\Gamma_u=\{j_x^0u\colon x\in\mathbb{R}^n\}=\{(x,y)\colon y=u(x)\}.$$

В случае 1-струй точка 1-*графика* состоит из аргумента, значения функции и значений частных производных первого порядка:

$$\{j_x^1u\colon x\in\mathbb{R}^n\}=\left\{(x,y,p)\colon y=u(x),\ p=\frac{\partial u}{\partial x}\right\},$$

см. рис. 1.5 для $n=1$. Заметим, что 1-график является сечением расслоения над областью определения.

Замечание. Поверхность 1-графика диффеоморфна области определения функции, x — n-мерная координата на этой поверхности; глад-

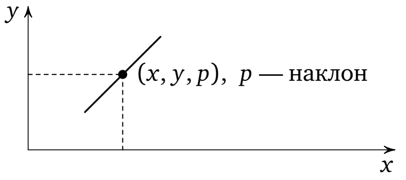

Рис. 1.5. Точка пространства 1-струй

кость поверхности меньше гладкости функции на 1, но в случае бесконечно гладкой или аналитической функции гладкость сохраняется.

Рассмотрим касательную плоскость к 1-графику. Это n-мерная плоскость в $(2n+1)$-мерном пространстве.

Теорема 3. *Все касательные плоскости всех* 1*-графиков в данной точке лежат в одной и той же гиперплоскости.*

Доказательство. Вдоль любой касательной плоскости имеем

$$dy = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i = \sum p_i\, dx_i, \quad \text{или} \quad dy = p\, dx.$$

Поскольку в данной точке пространства 1-струй p фиксировано, получаем уравнение на компоненты касательного вектора, задающее гиперплоскость. Поэтому касательная плоскость к любому 1-графику лежит в этой гиперплоскости. □

Например, при $n = 1$ уравнение $dy = p\, dx$ задаёт вертикальную плоскость в пространстве с координатами x, y, p. Касательными к 1-графикам являются все прямые, кроме вертикальной, лежащие в этой плоскости (см. рис. 1.6).

В этом случае видно, что сама гиперплоскость есть замыкание объединения касательных ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

Задача 3. Докажите, что это верно для любой размерности.

Следствие. *Построенное поле гиперплоскостей $dy = p\, dx$ задано инвариантно, т. е. в других координатах оно также будет задано уравнением $d\tilde{y} = \tilde{p}\, d\tilde{x}$.*

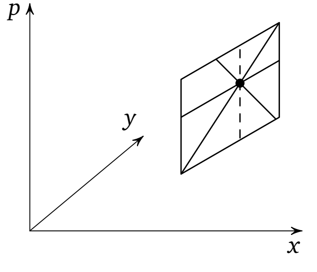

Рис. 1.6. Контактная плоскость в пространстве 1-струй

Определение. Указанное поле гиперплоскостей в J^1 называется *распределением Картана* или *стандартной контактной структурой*.

Задача 4. Какой размерности бывают интегральные многообразия у поля контактных плоскостей? (Многообразие называется интегральным, если в каждой точке его касательная плоскость есть подпространство контактной плоскости.)

Так как 1-график всегда является интегральным многообразием, n-мерное интегральное многообразие существует. А существуют ли многообразия большей размерности?

Ответ. Интегральных подмногообразий, размерности которых больше половины размерности контактной плоскости, поле контактных плоскостей не имеет.

Определение. Интегральное подмногообразие поля контактных плоскостей, размерность которого максимальна (т. е. равна половине размерности контактной плоскости), называется *лежандровым*.

Например, 1-графики лежандровы.

Теперь вернёмся к дифференциальному уравнению.

Уравнение — это $2n$-мерное подмногообразие Γ^{2n} в J^1.

В каждой регулярной точке этой поверхности удаётся выделить характеристическое направление, определяемое поверхностью и контактной структурой. Мы построим характеристики (интегральные кривые этого поля направлений), а затем из них составим интегральные многообразия.

Рассмотрим в точке поверхности Γ^{2n} пересечение касательной и контактной плоскостей. Эти плоскости либо совпадают, либо имеют $(2n-1)$-мерное пересечение. В первом случае точка *особая*, во втором — *регулярная*.

Заметим, что для поверхности Γ общего положения особые точки изолированы. Действительно, на Γ имеется $2n$ координат. Рассмотрим нормаль к касательной и нормаль к контактной плоскости. Точка особая, если эти нормали имеют одинаковое направление. Это значит, что $2n$ функций от $2n$ переменных одновременно обращаются в 0. В общем положении это случается лишь в изолированных точках.

Итак, в регулярных точках имеются $(2n-1)$-мерные пересечения касательной и контактной плоскостей. При $n=1$ это прямые. При $n>1$ — нет. Как выделить одномерное направление?

В локальных координатах контактное поле задаётся нулями 1-формы $\alpha = dy - p\,dx$, причём эту форму можно умножать на функцию, не обращающуюся в 0, — поле (контактная структура) при этом не меняется.

2-форма $\omega^2 = d\alpha$ — внешний дифференциал формы α — уже не определяется инвариантно контактной структурой, однако верно следующее.

Предложение 1. *Форма $\omega|_{\alpha=0}$ определена инвариантно с точностью до умножения на ненулевое число в каждой точке.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = f\alpha$. Тогда $\tilde{\alpha} = df \wedge \alpha + f\,d\alpha$,

$$d\tilde{\alpha}|_{\alpha=0} = f\,d\alpha|_{\alpha=0},$$

т. е. $\tilde{\omega}^2$ отличается от ω^2 умножением на число в каждой точке (говорят, что *конформный тип* формы ω^2 определён инвариантно). Заметим, что где $\alpha = 0$, там и $\tilde{\alpha} = 0$. □

Предложение 2. *Форма $\omega|_{\alpha=0}$ является симплектической структурой.*

Напомню, что *симплектической структурой* называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма в чётномерном пространстве.

Невырожденность формы ω означает, что $\forall\, \xi \neq 0\ \exists\, \eta \colon \omega(\xi, \eta) \neq 0$.

Доказательство предложения 2. В локальных координатах наша форма имеет вид

$$d\alpha = -\sum dp_i \wedge dx_i,$$

где p_i, x_i — координаты в плоскости $\alpha = 0$. □

Упражнение. Выпишите матрицу формы $\sum dp_i \wedge dx_i$ и убедитесь, что форма невырожденна.

Эта форма называется *кососкалярным произведением*. Выясним его геометрический смысл.

Пусть $n = 1$. Тогда $\omega = dx \wedge dp$. Значение этой формы на паре векторов есть ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы (см. рис. 1.7). В случае большей размерности $\omega(\xi, \eta)$ есть сумма ориентированных площадей проекций параллелограмма со сторонами ξ, η на плоскости с координатами (x_i, p_i).

Вспомним, что в евклидовом пространстве имеется понятие ортогонального дополнения. В n-мерном пространстве ортогональное дополнение к k-мерному подпространству является $(n-k)$-мерным подпространством. Для доказательства этого факта нужна только

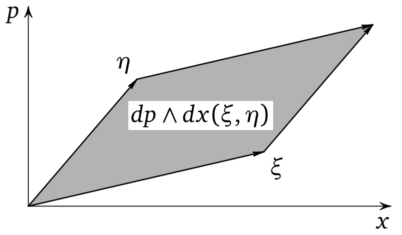

Рис. 1.7. Симплектическая структура

билинейность и невырожденность скалярного произведения, а симметричность не нужна, значит, то же самое верно и в случае кососкалярного произведения.

Итак, косоортогональным дополнением к $(2n-1)$-мерной плоскости в $2n$-мерном симплектическом пространстве является прямая. Но, в отличие от евклидова случая, она лежит в этой плоскости!

Лемма. *Косоортогональное дополнение к гиперплоскости в симплектическом пространстве есть прямая, лежащая в этой гиперплоскости.*

Доказательство. Пусть прямая натянута на вектор ξ. Косоортогональное дополнение к ней есть гиперплоскость $\{\eta\colon \omega(\xi,\eta)=0\}$. Вектор ξ лежит в этой гиперплоскости, так как

$$\omega(\xi,\xi) = -\omega(\xi,\xi) = 0. \qquad \square$$

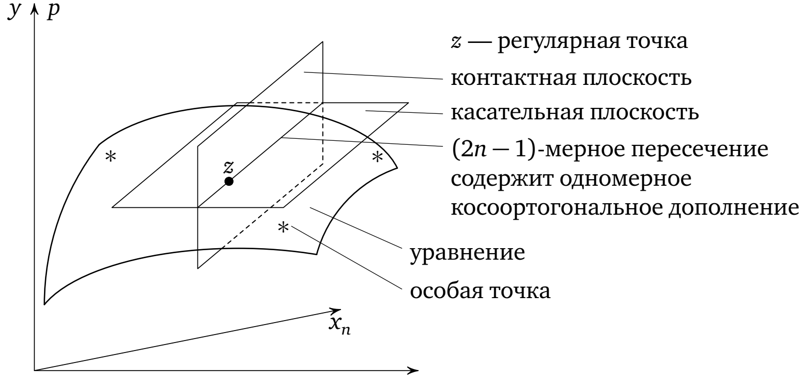

Рис. 1.8. Характеристическое направление для общего уравнения первого порядка

Определение. *Характеристическим направлением* в контактной плоскости называется кософртогональное дополнение к пересечению контактной и касательной к Γ плоскостей в регулярной точке.

Это кософртогональное дополнение — прямая. Итак, имеются инвариантная контактная структура и инвариантное отношение кософртогональности в каждой контактной плоскости. Тем самым в каждой регулярной точке инвариантно выделяется характеристическое направление (см. рис. 1.8).

Характеристиками называются интегральные кривые этого поля направлений.

Задача 5. Вычислите характеристическое поле направлений в координатах x, y, p, т. е. задайте его системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = ?$, $\dot{y} = ?$, $\dot{p} = ?$

Литература к лекции 1: [1, гл. 2], [4, § 11].

2. Задачи письменного экзамена

1995 год[1]

1 (1). Является ли гладкой поверхность в евклидовом пространстве

$$z = r^2 + \frac{2}{9} \tag{3}$$

(где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$)? Выпукла ли она? Найдите её кривизну.

2 (2). Найдите значение в начале координат потенциала двойного слоя плотности 1, распределённого вдоль поверхности (3).

3 (1, 2, 3, 3, 6). Вычислите средние значения по поверхности (3) следующих функций:

а) z; б) $1/r$; в) z/r^3; г) r^2; д) $1/r^3$.

4 (5). Решите внутреннюю задачу Дирихле с краевым условием $u = 1/r^3$ на поверхности (3) (для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.)

5 (5). Рассмотрим потенциал простого слоя плотности z, распределённого по поверхности (3). Найдите среднее значение этого потенциала по поверхности сферы $r^2 = 1$.

6 (2, 4). Найдите верхнюю и нижнюю грани интеграла Дирихле

$$\iiint (\operatorname{grad} u)^2 \, dx \, dy \, dz$$

по области, ограниченной поверхностью (3), на множестве гладких функций в замыкании этой области, совпадающих с r^2 на её границе.

7 (6). Найдите при малых $|t|$ значение в точке ($x = y = 0$, $z = 1/2$) решения f уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \operatorname{grad} u) = f^2$$

с начальным условием ($f \equiv 1$ при $t = 0$), где u — решение задачи 4.

Указание. Для этого не обязательно знать ответ задачи 4, задачу 7 можно решать независимо.

1996 год

1. Дано векторное поле

$$v(x, y) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

[1] Рядом с номером каждой задачи в скобках указано количество баллов за правильное решение задачи (частей задачи). Предполагаемые критерии отметок при трёхчасовом экзамене: удовлетворительно — **12**, хорошо — **16**, отлично — **26** (при максимуме **40**).

и функция $u|_{x=1} = f(y)$. При каком условии на f в окрестности точки $(1, 0)$ существует решение задачи Коши для уравнений $L_v u = 0$? Единственно ли оно?

2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -\nabla U(x), \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$. При каких (вещественных) значениях a все решения уравнения (4) периодичны?

3. На двух прямых в $\mathbb{R}^3$ распределён электрический заряд: на прямой $z = 1$, $y = x$ — с плотностью 1 и на прямой $z = -1$, $y = -x$ — с плотностью -1. Найдите эквипотенциальные поверхности поля, созданного этими зарядами.

4. На сфере $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ задана функция v, гармоническая всюду, кроме точки $N = (0, 0, 1)$. Пусть $\mathbb{R}^2$ — плоскость $z = 0$ и

$$p : S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2$$

— стереографическая проекция. Пусть

$$u(x, y) = v(p^{-1}(x, y)).$$

Докажите, что

$$\int_0^{2\pi} u_r(1, \varphi)\, d\varphi = 0.$$

Литература

[1] *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2012.

[2] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989; М.: URSS, 2016.

[3] *Арнольд В. И.* О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырёхмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 1–9.

[4] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.

[5] *Арнольд В. И.* Разветвлённое накрытие $\mathbb{C}P^2 \to S^4$, гиперболичность и проективная топология // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 36–47.

[6] Вариационные принципы механики. Сборник статей / Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959.

[7] *Картан А.* Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963.

[8] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.

[9] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

[10] *Максвелл Дж. К.* Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.: Наука, 1989.

[11] *Dupont J. L., Lusztig G.* On manifolds satisfying $w_1^2 = 0$ // Topology. 1971. Vol. 10. P. 81–92.

[12] *Massani P. R.* Norbert Wiener. 1894–1964. Basel: Birkhäuser, 1990.

[13] *Ostrowski A.* Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1925. Vol. 33. P. 245–251.

[14] *Sylvester J. J.* Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. Vol. 2. P. 291–307; см. также в кн.: «The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester». Vol. 3. Cambridge Univ. Press, 1909. P. 37–51.

Учебное издание для вузов

Владимир Игоревич Арнольд

Лекции об уравнениях с частными производными

Подписано в печать 24.07.2017 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru
