И. В. Ященко, С. А. Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я.
Модульный курс

Геометрия

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Я97

Ященко И. В., Шестаков С. А.

Я97 ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия. — М.: МЦНМО, 2018. — 120 с.

ISBN 978-5-4439-1198-4

Настоящее пособие предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике. Пособие содержит методические рекомендации с разбором типовых примеров к каждому заданию ОГЭ, подготовительные и зачётные тренинги к каждому заданию ОГЭ, тренировочные работы в формате ОГЭ, соответствующие текущим спецификации и демоверсии экзаменационной работы.

Такая структура пособия представляется универсальной, она позволяет познакомиться со всем спектром заданий открытого банка ОГЭ по математике и методами их решения, обеспечить качественную и полноценную подготовку к экзамену на любом уровне.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1198-4

Предисловие

Настоящее пособие является второй частью модульного курса «ОГЭ по математике от А до Я» и предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике (модуль «Геометрия», задания 9—13 первой части варианта ОГЭ по математике и задания 24—26 второй его части). В последние годы определилась устойчивая структура экзамена: экзаменационный вариант состоит из 26 заданий, каждое из которых может быть отнесено к одному из трёх модулей: «Реальная математика», «Алгебра», «Геометрия». Вариант экзаменационной работы содержит как задания базового уровня (с кратким ответом), так и задания повышенного и высокого уровней сложности (задания с развёрнутым решением). Задания 9—13 модуля «Геометрия» являются заданиями базового уровня, задания 24—26 — заданиями повышенного и высокого уровней сложности.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть пособия содержит описание типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач (именно на его основе формируются варианты экзаменационной работы), методические рекомендации и примеры решения задач модуля «Геометрия» открытого банка. Наряду с методическими рекомендациями и большим числом разобранных примеров она включает в себя 16 тренингов из 10 задач каждый: по два тренинга к каждому из заданий 9—13 и 24—26 ОГЭ по математике, составляющих модуль «Геометрия», для отработки навыков их решения.

При самостоятельной работе с пособием следует сначала прочитать методические рекомендации к соответствующему заданию ОГЭ, затем попытаться выполнить подготовительные задания (они составляют первый тренинг) и понять, какие задачи решены неправильно. Повторив теоретический материал и ещё раз обратившись при необходимости к методическим рекомендациям, следует выполнить зачётные задания (они составляют второй тренинг). Отметим, что задания в пособии подобраны так, чтобы познакомить читателя со всем спектром задач соответствующего модуля открытого банка ОГЭ по математике и по окончании работы с пособием чувствовать себя на экзамене уверенно и спокойно. Вторую часть пособия составили тренировочные варианты ОГЭ по математике (модуль «Геометрия»).

Надеемся, что пособие окажется полезным как выпускникам основной школы, так учителям и методистам, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Пособие может быть использовано для организации итогового повторения (в том числе, с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену в 9 классе.

Авторы глубоко признательны и благодарны О. А. Васильевой за внимательное и вдумчивое чтение рукописи, замечания и предложения, в значительной степени способствовавшие улучшению пособия.

Задание 9

Краткие методические рекомендации

Задание 9 ОГЭ по математике открывает блок геометрических задач в типовом экзаменационном варианте. Это несложная планиметрическая задача в одно-два действия, проверяющая владение базовыми знаниями по теме «Треугольники». Для успешного решения задачи достаточно знать, чему равна сумма углов треугольника, что такое медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника, какова связь между длинами средней линии треугольника и параллельной ей стороны, уметь применять теорему Пифагора для вычисления одной из сторон прямоугольного треугольника по двум другим его сторонам, понимать, что такое равнобедренный и равносторонний треугольники, и уметь применять их простейшие свойства к решению задач.

Напомним основные факты, связанные с треугольниками:

• сумма углов треугольника равна 180°;

• внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов треугольника;

• высоты треугольника пересекаются в одной точке;

• биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром вписанной окружности треугольника);

• серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром описанной окружности треугольника);

• медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершин треугольника;

• средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.

Если a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, α, β, γ — противолежащие этим сторонам углы, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, S — его площадь, то справедливы следующие формулы:

1) $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$;

2) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\dfrac{1}{2}ac\sin\beta$;

3) $S=\dfrac{abc}{4R}$;

4) $S = pr$;

5) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

В прямоугольном треугольнике один из катетов можно считать высотой, а другой — основанием. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Разумеется, все остальные формулы площади треугольника применимы и к прямоугольному треугольнику.

Пример 1. Сумма длин средних линий треугольника равна 11. Найдите периметр этого треугольника.

Решение. Поскольку сторона треугольника вдвое больше параллельной ей средней линии, сумма длин сторон треугольника, т. е. его периметр, также будет вдвое больше суммы длин средних линий этого треугольника. Поэтому искомый периметр равен 22.

Ответ. 22.

Пример 2. Один из углов треугольника на 15° больше среднего арифметического двух других его углов. Найдите этот угол. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть α, β, γ — углы данного треугольника и

$$\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2} + 15^\circ.$$

Тогда $\beta+\gamma = 2\alpha - 30^\circ$. Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому

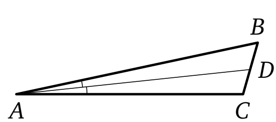
$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ,$$

и, следовательно,

$$\alpha + 2\alpha - 30^\circ = 180^\circ, \quad \text{т. е.} \quad 3\alpha = 210^\circ \quad \text{и} \quad \alpha = 70^\circ.$$

Ответ. 70.

Пример 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, угол C равен 106°, угол CAD равен 6°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

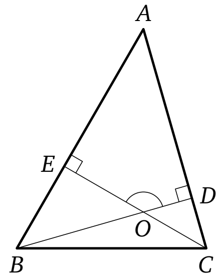


Решение. Поскольку AD — биссектриса угла BAC, он вдвое больше угла CAD, т. е. равен 12°. Но тогда

$$\angle B = 180^\circ - \angle BAC - \angle C = 180^\circ - 12^\circ - 106^\circ = 62^\circ.$$

Ответ. 62.

Пример 4. В треугольнике ABC угол A равен $46°$, углы B и C острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

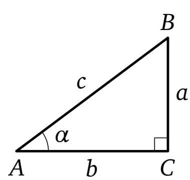


Решение. Поскольку в четырёхугольнике $ADOE$ два угла прямые, сумма двух других углов равна $180°$. Поэтому

$$\angle DOE = 180° - \angle A = 180° - 46° = 134°.$$

Ответ. 134.

Особое место среди всех треугольников занимает *прямоугольный* треугольник. Для прямоугольного треугольника справедлива теорема Пифагора, а синус, косинус или тангенс его острого угла можно найти как отношение катета к гипотенузе или катета к катету. Таким образом, для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c справедливы следующие основные формулы:



- $a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора;
- $S = \frac{1}{2}ab$;
- середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, т. е. является центром описанной окружности треугольника, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$;
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Пример 5. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8, а гипотенуза равна 17. Найдите второй катет этого треугольника.

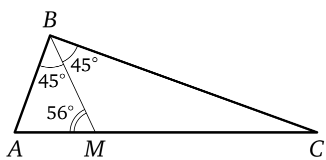
Решение. При решении этой задачи вполне можно обойтись без рисунка. Из теоремы Пифагора следует, что второй катет этого треугольника равен

$$\sqrt{17^2-8^2}=\sqrt{(17-8)(17+8)}=\sqrt{9\cdot 25}=3\cdot 5=15.$$

Ответ. 15.

Пример 6. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника образует с его гипотенузой угол 56°. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, ACB — его меньший угол, а биссектриса угла ABC пересекает гипотенузу в точке M.



Тогда $\angle BMA=56°$. Поскольку этот угол — внешний угол треугольника BMC, он равен сумме углов MBC и MCB. Таким образом,

$$\angle MCB=\angle AMB-\angle MBC=56°-45°=11°.$$

Ответ. 11.

Пример 7. Высота BH прямого угла прямоугольного треугольника ABC делит его гипотенузу на отрезки $AH=2$ и $CH=8$. Найдите длину этой высоты.

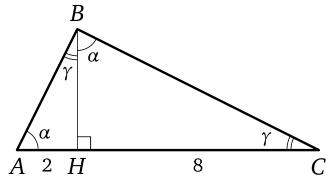
Решение. Обозначим острые углы A и C данного треугольника через α и γ соответственно. Так как эти углы дополняют друг друга до 90°, получаем также, что $\angle ABH=\gamma$, $\angle CBH=\alpha$. Для решения задачи можно воспользоваться подобием треугольников ABH и BCH, откуда $\frac{BH}{CH}=\frac{AH}{BH}$, либо тригонометрическими функциями острых углов прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BH}{AH}=\frac{CH}{BH}.$$

В любом случае получаем, что

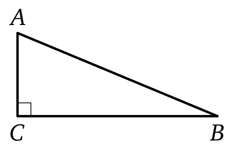
$$BH^2=AH\cdot CH$$

(квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу), откуда $BH^2 = 2 \cdot 8 = 16$ и $BH = 4$.



Ответ. 4.

Пример 8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin A = \frac{12}{13}$, $AC = 10$. Найдите BC.



Решение. Задачу можно решить несколькими способами, например, так. Поскольку $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$, можно считать, что $BC = 12x$, $AB = 13x$. По теореме Пифагора $(12x)^2 + 10^2 = (13x)^2$, откуда $x = 2$, и, следовательно, $BC = 24$.

Ответ. 24.

Важным частным случаем треугольника является также *равнобедренный* треугольник. В таком треугольнике углы при основании равны, а высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой, поэтому именно на ней находятся центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника. Частный случай равнобедренного треугольника — *равносторонний* треугольник. В нём уже каждая высота является медианой и биссектрисой, поэтому центры вписанной и описанной окружностей совпадают и $R = 2r$.

Пример 9. Найдите угол C треугольника ABC, если $AB = BC$, а внешний угол при вершине B равен $76°$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних не смежных с ним углов. Поэтому сумма углов при основании данного равнобедренного треугольника равна $76°$, а каждый из них равен половине этой величины, т. е. $38°$.

Ответ. 38.

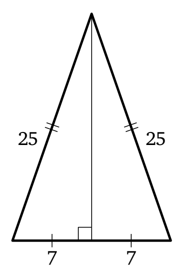
Пример 10. Найдите периметр равностороннего треугольника, если одна из его средних линий равна 25.

Решение. Поскольку все стороны равностороннего треугольника равны и каждая из них вдвое больше его средней линии, длина стороны данного равностороннего треугольника будет равна 50, а его периметр — 150.

Ответ. 150.

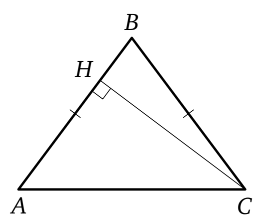
Пример 11. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к его основанию, если боковые стороны треугольника равны 25, а основание равно 14.

Решение. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, является и его медианой и, следовательно, делит основание пополам. Поэтому длину высоты можно найти как длину катета прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 25, а второй катет равен 7. Получим, что в силу теоремы Пифагора искомая длина равна $\sqrt{25^2-7^2}=24$.



Ответ. 24.

Пример 12. В треугольнике ABC известно, что $AB=BC$, $AC=15$, высота CH равна 12. Найдите синус угла ACB.



Решение. Поскольку $\angle ACB=\angle CAB$, синусы этих углов также равны:

$$\sin\angle ACB = \sin\angle CAB = \frac{CH}{AC} = \frac{12}{15} = 0{,}8.$$

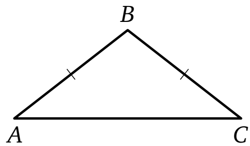
Ответ. 0,8.

Подготовительные задачи

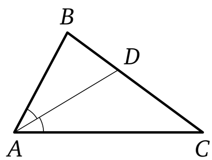
1. В треугольнике два угла равны 27° и 79°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

2. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 43°. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.

3. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 104^\circ$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



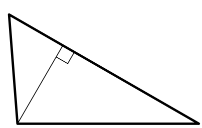
4. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 62^\circ$, AD — биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



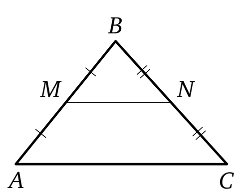
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите гипотенузу этого треугольника.

6. В прямоугольном треугольнике катет и гипотенуза равны 12 и 20 соответственно. Найдите другой катет этого треугольника.

7. Сторона треугольника равна 29, а высота, проведённая к этой стороне, равна 12. Найдите площадь этого треугольника.



8. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 21, сторона BC равна 22, сторона AC равна 28. Найдите MN.



Содержание

Учебно-методическое пособие

Иван Валериевич Ященко
Сергей Алексеевич Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия

Подписано в печать 30.06.2017 г. Формат 60×90 $1/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 5000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru