

И. Р. Высоцкий

Дидактические материалы по теории вероятностей

8—9 классы

Издание соответствует Федеральному государственному
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 372.851
ББК 22.17я72
В93

Рецензент: А. В. Семенов

Высоцкий И. Р.
В93 Дидактические материалы по теории вероятностей.
8—9 классы. — М.: МЦНМО, 2018. — 224 с.

ISBN 978-5-4439-1240-0

Настоящее пособие содержит материалы для курса теории вероятностей в 8—9 классах общеобразовательных школ. Задачи систематизированы по типам и методам решения; каждый тип задач снабжен примером возможного решения или подробными указаниями. Особое внимание уделяется универсальным методам — построению дерева вероятностей и графическим представлениям случайных экспериментов.

Пособие составлено с учетом малого количества опыта школьного преподавания этой дисциплины и охватывает все значимые темы вплоть до первичного изучения случайных величин.

Пособие содержит материалы для работы в классе, домашние задания, самостоятельные и контрольные работы, а также индивидуальные карточки. Пособие адресовано учителям математики, школьникам и родителям и позволяет подготовить учащихся к итоговым контрольным работам, ОГЭ и ЕГЭ.

ББК 22.17я72

*Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации
Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень
организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных
к использованию в образовательном процессе.*

12+

ISBN 978-5-4439-1240-0

© Высоцкий И. Р., 2018.
© МЦНМО, 2018.

Для учителя

Назрела необходимость, обобщив накопившийся опыт, превратить изучение теории вероятностей в школе в систему с простыми учебными элементами и ясными итоговыми требованиями, как в курсе алгебры. Попытка сделать это предпринята здесь.

Пособие предназначено в основном для использования на уроках математики и для подготовки к ним. Автор учитывал, что опыта преподавания элементов теории вероятностей в российской школе мало. Поэтому каждый тип задач снабжён примером возможного решения или указаниями.

Пособие содержит много (избыточно много) задач, позволяющих учителю выстроить классную и домашнюю работу, провести самостоятельные и контрольные работы, подготовить учащихся к итоговым контрольным работам по теории вероятностей, к ОГЭ и ЕГЭ.

При составлении пособия использовался выраженный некомбинаторный подход: для решения задач не требуются предварительные сведения о факториалах, числах сочетаний и т. п. Необходимые коэффициенты содержатся в таблице. Лишь в некоторых задачах повышенной трудности требуется использовать формулу для числа сочетаний.

В пособии 3 раздела, всего 11 параграфов. Темы параграфов соответствуют действующему образовательному стандарту и примерным образовательным программам основной школы (34 или 68 часов за два года). Отсутствует параграф, посвящённый геометрической вероятности. В каждый параграф включено несколько задач повышенной трудности.

Темы, контролируемые в действующих моделях ОГЭ и ЕГЭ, представлены в трёх первых разделах.

Числа в задачах по возможности подобраны так, чтобы избежать громоздких вычислений, однако учащимся **разрешается пользоваться калькулятором**. Он необходим при решении задач § 6 и 7, где требуется возводить дроби в степени даже после упрощений.

В каждой теме предложены самостоятельные работы, а также индивидуальные карточки, с помощью которых учитель может организовать индивидуальную работу с мотивированными учащимися. К каждому разделу дана примерная контрольная работа.

Каждая самостоятельная работа приведена в двух равноценных вариантах и рассчитана на 20 минут. Каждая контрольная работа рассчитана на 45 минут и содержит шесть задач в порядке возрастания сложности.

Домашние и классные задачи не отличаются по уровню сложности. Каждая карточка для индивидуальной работы содержит две задачи: первая среднего уровня сложности, вторая — сложная.

Римская цифра в обозначении контрольной работы указывает раздел. Арабская цифра — номер варианта. Работа КI составлена в четырёх вариантах: два первых предназначены для проверки начальных базовых знаний, достаточных для успешного решения задач итоговой аттестации. Варианты 3 и 4 содержат более содержательные задачи. Работы КII и КIII составлены в двух вариантах каждая.

Использованные обозначения: **С** — самостоятельная работа, **К** — контрольная работа, **И** — карточка для индивидуальной работы, * — задача повышенной сложности.

В конце пособия дана примерная программа курса вероятности и статистики, вариант планирования с привязкой к параграфам этого пособия, а также небольшой справочник. Термины, разъясняемые в справочнике, в тексте пособия выделены курсивом.

Автор благодарен В. С. Шклярнику, А. В. Семенову, О. А. Виноградовой за помощь в подготовке сборника.

Автор будет благодарен всем, кто использует сборник, и будет особенно признателен — за отзывы, замечания и предложения, которые можно оставить на сайте лаборатории методики вероятности МЦНМО: <http://ptlab.mscme.ru>.

Раздел I

Случайные события

§ 1. Классические случайные эксперименты с монетами и игральными костями

Пояснение. Опыты с равновероятными элементарными событиями в жизни практически не встречаются. Это игры — лотереи, жребии и т. п. Теория вероятностей произошла от подсчёта шансов в играх, но давно вышла за рамки игровых экспериментов. Однако классические вероятностные модели — монета и игральные кубики (кости), жребии и знаменитые урны с шарами — остаются важным учебным элементом и частью научной культуры. Во-первых, потому что в этих экспериментах заранее известны вероятности элементарных исходов. Но главное — потому что эти эксперименты, несмотря на простоту, позволяют моделировать гораздо более важные и сложные вероятностные ситуации.

С дидактической точки зрения эксперименты с костями и монетами позволяют выработать первичные навыки вычисления вероятностей и увидеть смысл формул и фактов.

Во всех этих опытах множество элементарных событий эксперимента определяется естественной организацией эксперимента. Если бросают одну монету, то исходов два — орёл и решка, если монету бросают дважды, то элементарных событий четыре. При бросании одной кости их шесть, а при двукратном бросании кости элементарных событий $6 \cdot 6 = 36$.

Обратим внимание на то, что лучше говорить о двукратном бросании монеты, а не о двух монетах. Лучше говорить о двукратном бросании игровой кости, а не о бросании двух костей. Это связано с тем, что при двукратном бросании легко различить последовательность выпадений. При однократном бросании двух монет или костей, для того чтобы различать исходы, придется считать, что кости разного цвета, а монеты, например, разного достоинства.

Задачи для работы в классе

1. Симметричную монету бросили два раза.

а) Сколько элементарных исходов в этом эксперименте? Выпишите их все с помощью кратких обозначений: О — «орёл» и Р — «решка».

б) Выпишите элементарные исходы, благоприятствующие событию «выпал хотя бы один орёл».

2. Симметричную монету бросили два раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие

$$A = \{\text{в первый раз выпал орёл}\}.$$

3. Симметричную монету бросили два раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие:

а) $A = \{\text{оба раза выпало одно и то же}\};$

б) $B = \{\text{решка выпала хотя бы один раз}\}.$

Пример решения. а) $A = \{OO, PP\};$ б) $B = \{OP, PO, PP\}.$

4. Симметричную монету бросили три раза. Сколько всего элементарных исходов в таком эксперименте? Запишите их все.

5. Симметричную монету бросили три раза. Запишите перечислением элементарных исходов в фигурных скобках событие:

а) $A = \{\text{во второй раз выпал орёл}\};$

б) $B = \{\text{ни разу не случились две решки подряд}\}.$

6. Симметричную монету бросили два раза. Опишите словами событие:

а) $C = \{OP, PP\};$ б) $D = \{OP, PO, PP\}.$

7. Симметричную монету бросили три раза. Опишите словами событие:

а) $A = \{OOP, OPO, POO\};$ б) $B = \{OOO, OPO\}.$

8. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события $A = \{\text{в первый раз выпал орёл}\}.$

Пример решения. Всего равновозможных элементарных исходов четыре: $N = 4.$

Событию A благоприятствуют два исхода: OO и OP , $N(A) = 2.$

Поэтому

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

9. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события:

а) $B = \{\text{во второй раз выпала решка}\};$

б) $C = \{\text{решка выпала хотя бы один раз}\}.$

10. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события $A = \{\text{первые два броска окончились одинаково}\}$.

Пример решения. Всего элементарных событий $N = 8$;

$$A = \{OOO, OOP, PPO, PPP\}, \quad N(A) = 4, \quad P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

11. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{выпал хотя бы один орёл}\}$;
- б) $B = \{\text{выпала одна или две решки}\}$.

12. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{орлы и решки чередовались}\}$;
- б) $B = \{\text{решка выпала ровно два раза}\}$.

13. Правильную игральную кость бросают один раз.

- а) Что является элементарным исходом в этом эксперименте? Сколько их всего?
- б) Запишите перечислением элементарных исходов событие

$$A = \{\text{выпало нечётное число очков}\}.$$

Пример решения. а) Число выпавших очков; их шесть;

б) $A = \{1, 3, 5\}$.

14. Правильную игральную кость бросают один раз. Запишите перечислением элементарных исходов событие:

- а) $M = \{\text{выпало не больше чем 3 очка}\}$;
- б) $N = \{\text{выпавшее число очков кратно числу 3}\}$.

15. Правильную игральную кость бросают один раз. Опишите словами событие:

- а) $A = \{2, 4, 6\}$; б) $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

16. Правильную игральную кость бросают один раз. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{выпало нечётное число очков}\}$;
- б) $B = \{\text{выпавшее число очков не меньше пяти}\}$.

17. Правильную игральную кость бросают дважды.

- а) Что является элементарным исходом в этом эксперименте?
- б) Сколько элементарных исходов в этом эксперименте?

18. Правильную игральную кость бросают дважды. Изобразите таблицу эксперимента, в которой номер строки — это результат первого броска, а номер столбца — результат второго броска. В таблице отметьте элементарные события $(3; 2)$, $(1; 6)$ и $(6; 1)$.

Пример решения. Построим таблицу эксперимента. Нужные исходы пометим крестиком.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | × |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | × | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | × | | | | | |

19. Правильную игральную кость бросают дважды. Отметьте следующие события в таблице эксперимента и найдите их вероятности:

- а) элементарное событие $(4; 2)$;
 б) событие $B = \{(4; 2), (5; 1), (1; 5)\}$.

20. Правильную игральную кость бросают дважды. Отметьте в таблице эксперимента событие A и найдите его вероятность, если:

- а) $A = \{(6; 3), (5; 2), (1; 4), (6, 1)\}$;
 б) $A = \{\text{один раз выпало 4, а другой раз выпало 5}\}$.

Указание. Решая п. б), не смешивайте события «один раз 4, а другой раз 5» и «первый раз 4, а второй раз 5». В первом случае нет указания, что 4 выпало именно в первый раз.

21. Правильную игральную кость бросают дважды.

- а) Запишите перечислением элементарные исходы, благоприятствующие событию $A = \{\text{сумма выпавших очков равна 5}\}$.
 б) Отметьте это событие в таблице эксперимента.

22. Правильную игральную кость бросают дважды. В таблице эксперимента отметьте элементарные исходы, благоприятствующие событию:

- а) $A = \{\text{сумма выпавших очков равна 8}\}$;
 б) $B = \{\text{результат первого броска больше результата второго на 2}\}$.

23. Правильную игральную кость бросают дважды. Опишите словами событие, отмеченное в таблице эксперимента:

а)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | × |
| 4 | | | | | × | |
| 5 | | | | × | | |
| 6 | | × | | | | |

;

б)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | × | | |
| 2 | | | | | × | |
| 3 | | | | | | × |
| 4 | × | | | | | |
| 5 | | × | | | | |
| 6 | | | × | | | |

.

24. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события $A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 8\}$.

Пример решения. Отметим событие A в таблице эксперимента. Всего равновозможных исходов $N = 36$. Событию A благоприятствуют $N(A) = 5$ исходов, $P(A) = \frac{5}{36}$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | × |
| 3 | | | | | × | |
| 4 | | | | × | | |
| 5 | | | × | | | |
| 6 | × | | | | | |

25. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 7\}$;
 б) $B = \{\text{во второй раз выпало на } 1 \text{ больше, чем в первый}\}$.

26. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

- а) $M = \{\text{сумма выпавших очков меньше девяти}\}$;
 б) $N = \{\text{произведение чисел выпавших очков равно } 12\}$.

27. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

- а) $K = \{\text{выпавшие очки отличаются меньше чем на } 2\}$;
 б) $L = \{\text{числа выпавших очков отличаются больше чем на } 3\}$.

28. Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков равна 8. Найдите вероятность события «в первый раз выпало не больше чем 5».

Пример решения. В таблице эксперимента видно, что всего возможно $N = 5$ элементарных исходов (закрашены серым цветом). Событию $A = \{\text{в первый раз не более } 5\}$ благоприятствуют $N(A) = 4$ из них (помечены крестиками). Значит, $P(A) = \frac{N(A)}{N} = 0,8$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | × |
| 3 | | | | | × | |
| 4 | | | | × | | |
| 5 | | | × | | | |
| 6 | | | | | | |

29* Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков меньше шести. Найдите вероятность события:

- а) «в первый раз выпало 2 очка»;
- б) «сумма выпавших очков равна 5».

Задания для домашней работы

30. Симметричную монету бросили два раза. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{во второй раз выпал орёл}\}$;
- б) $C = \{\text{результаты бросаний не одинаковы}\}$.

31. Симметричную монету бросили три раза. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{в первый и третий раз результаты бросаний одинаковы}\}$;
- б) $B = \{\text{результаты не всех бросаний одинаковы}\}$.

32. Правильную игральную кость бросают один раз. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{выпавшее число очков не больше чем 5}\}$;
- б) $B = \{\text{выпало число от двух до четырёх}\}$.

33. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события:

- а) $A = \{\text{сумма выпавших очков равна 4}\}$;
- б) $B = \{\text{выпавшие числа отличаются на 1 или на 2}\}$.

34* Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков равна 9. Отметьте в таблице эксперимента событие «в первый раз выпало больше чем 3 очка» и найдите его вероятность.

35* Правильную игральную кость бросают дважды. Известно, что сумма выпавших очков больше 8. Отметьте в таблице эксперимента событие «во второй раз выпало число 4» и найдите его вероятность.

Содержание

| | |
|---|-----------|
| Для учителя | 3 |
| Раздел I. Случайные события | 5 |
| § 1. Классические случайные эксперименты с монетами и игральными костями | 5 |
| § 2. Опыты с равновозможными элементарными исходами | 11 |
| § 3. Решение задач с помощью координатной прямой | 18 |
| § 4. Операции над событиями. Диаграммы Эйлера. Независимые события | 23 |
| § 5. Дерево случайного эксперимента | 35 |
| Раздел II. Эксперименты с последовательными испытаниями | 51 |
| § 6. Испытания до первого успеха | 51 |
| § 7. Серии испытаний Бернулли | 60 |
| § 8. Случайный выбор из конечной совокупности | 73 |
| Раздел III. Случайные величины | 82 |
| § 9. Дискретная случайная величина. Распределение вероятностей | 82 |
| § 10. Математическое ожидание случайной величины | 95 |
| § 11. Дисперсия и стандартное отклонение случайной величины | 106 |
| Карточки для индивидуальной работы | 117 |
| Самостоятельные работы | 151 |
| Контрольные работы | 173 |
| Справочник | 181 |
| Примерная программа в части статистики и теории вероятностей | 189 |
| Примерное планирование курса «Теория вероятностей и статистика» по УМК Ю. Н. Тюрина, А. А. Макарова, И. Р. Высоцкого и И. В. Яценко | 195 |
| Ответы | 205 |

Учебно-методическое издание

Иван Ростиславович Высоцкий

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. 8—9 КЛАССЫ

Подписано в печать 01.10.2017 г. Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 14. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано с электронных носителей издательства.

ОАО «Тверской полиграфический комбинат».

170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.

Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34. Телефон/факс: (4822) 44-42-15.

Home page: www.tverpk.ru Email: sales@tverpk.ru

